МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ПРИКАРПАТСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ВАСИЛЯ СТЕФАНИКА

Фізико-технічний факультет
Кафедра фізики і методики викладання

Лабораторні роботи з курсу

МЕТОДИ ОБРОБКИ РЕЗУЛЬТАТІВ ШКІЛЬНОГО ФІЗИЧНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

Освітня програма СЕРЕДНЯ ОСВІТА (ФІЗИКА)

Упорядник
доктор фізико-математичних
наук,
професор кафедри фізики
і методики викладання
Бойчук В.М.

м. Івано-Франківськ - 2020

ЗМІСТ

Лабораторна робота №1
Основні поняття теорії похибок

Числове значення будь-якої фізичної величини знаходять шляхом виміру, або розрахунку. Вимірювання це процес відшукання значення фізичної величини дослідним шляхом за допомогою спеціальних технічних засобів. Виміряти безпосередньо якусь фізичну величину це означає порівняти її з деякою іншою однорідною з нею величиною, взятою за одиницю виміру. Отримане число показує, у скільки разів величина, що вимірюється, більше або менше обраної одиниці виміру. Отриманому числу приписується таке ж найменування, як і обраній одиниці.

Прямі виміри здійснюються або шляхом безпосереднього порівняння фізичної величини, що вимірюється, з одиницями міри, як це має місце при вимірах довжини лінійкою, штангенциркулем, мікрометром і т.п., або приладами, градуйованими у визначених одиницях, наприклад амперметрами, вольтметрами і т.п.

В багатьох випадках значення фізичної величини визначають за допомогою обчислень, використовуючи при цьому значення безпосередньо виміряних величин. Це трапляється тоді, коли відома функціональна залежність даної величини від безпосередньо виміряних величин. Наприклад, для визначення об'єму циліндра використовують функціональну залежність від діаметра d та висоти h:

$$V = \pi \cdot d^2 \cdot h / 4 .$$

При непрямих вимірах, величину y знаходять по відомій функціональній залежності y = f(x1, x2 ,...,xn) від величин x1, x2, … xn, значення котрих знаходять прямими вимірами.

Виміряне значення фізичної величини завжди відрізняється від істинного тому, що при вимірюваннях завжди виникають похибки. При вимірюваннях необхідно знайти не тільки наближене значення фізичної величини, але й обчислити відхилення цього значення від істинного. Цим питанням займається теорія похибок.

Всі вимірювання можуть бути виконані тільки з визначеним ступенем точності. Похибка вимірювань визначається як відхилення результату виміру від істинного значення величини.

Як показує теорія і практика, до істинного значення вимірюваної величини найближче підходить середнє арифметичне значення багатьох вимірювань. Якщо якусь величину x виміряли n раз і отримали ряд значень x1, x2 ... xn, то найбільш ймовірне значення виміряної величини x знаходять як середнє арифметичне результатів окремих вимірів:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i . \qquad (1)$$

Похибки вимірів бувають систематичними, випадковими і промахами.

Систематична похибка – це складова частина похибки виміру, що залишається сталою, або такою, що закономірно змінюється при повторних вимірах однієї та тієї ж величини.

Випадкова похибка – це складова частина похибки вимірювань, що змінюється випадково при повторних вимірах однієї та тієї ж величини.

Промах – це такий результат виміру, значення якого набагато відрізняється від очікуваної похибки в даних умовах. Наприклад, ці похибки можуть бути отримані, якщо прилад несправний або якщо експериментатор неуважний.

Похибки вимірювань бувають абсолютними і відносними. Абсолютною похибкою вимірювання називається похибка, виражена в одиницях величини, що вимірюється, вона визначається формулою

$$\Delta x = x - X \;, \qquad (2)$$

де x – значення, здобуте при вимірюванні; X – справжнє значення величини, що вимірюється (найбільш ймовірне).

Середня арифметична абсолютна похибка n вимірювань дорівнює

$$\langle \Delta x \rangle = \sum_{i=1}^{n} |\Delta x| \Big/ n \,. \qquad (3)$$

Величина $\langle \Delta x \rangle$ визначає інтервал, у межах якого з певною ймовірністю знаходиться істинне значення вимірюваної величини. За визначенням

$x - \Delta x \le x \le x + \Delta x$., (4)

де Δx – абсолютна похибка вимірювань x. Чим більша ширина інтервалу 2Δx, тим більшою буде ймовірність того, що точне значення вимірюваної величини належить цьому інтервалу.

Відносною похибкою вимірювання називається відношення абсолютної похибки вимірювання до справжнього значення величини що вимірюється

$$E = \frac{\Delta x}{\bar{x}} \,, \qquad (5)$$

як правило, визначається у відсотках

$$E = \frac{\Delta x}{\bar{x}} \cdot 100\% \,. \qquad (6)$$

Знайти істинне значення фізичної величини x неможливо. Можна тільки вказати на інтервал (xmin, xmax), в якому з ймовірністю α знаходиться значення досліджуваної величини.

Приклад: поглядом вимірюють зріст студента в сантиметрах. Ми можемо припустити, що зріст студента може бути визначений між 1,5 м і 2,0 м з ймовірністю 0,9. Тоді ми можемо стверджувати, що зріст студента може бути визначений між 1,6 м і 1,8 м з меншою ймовірністю 0,6 і так далі. Цей інтервал називають довірчим інтервалом. На рис.1 зображено довірчий інтервал досліджуваної величини x, де $\bar{x}$ – найбільш ймовірне значення виміряної величини; Δx – півширина довірчого інтервалу для заданого α. Тому, істинне значення вимірюваної величини може бути визначене як

$$x = \bar{x} \pm \Delta x \,, \qquad (7)$$

з ймовірністю α, або

$$x - \Delta x \le x \le x + \Delta x \,. \qquad (8)$$

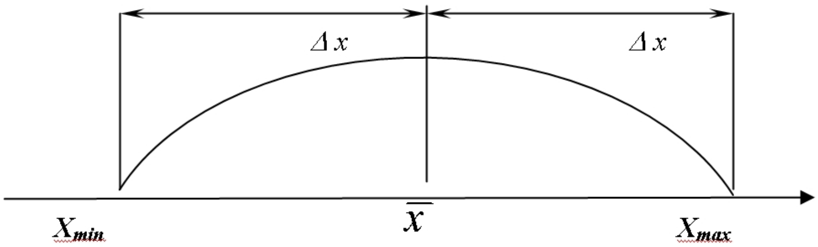


Рисунок 1

Ймовірність знаходження істинного значення вимірюваної величини в інтервалі $\pm\Delta x$ залежить від кількості вимірювань n. Якщо $n \to \infty$, то ймовірність наближається до Якщо ж n дорівнює кільком одиницям, то ймовірність не досягає й 0,6. Тому для малої кількості вимірювань згаданий інтервал розширюють, збільшуючи Δx. Для цього знаходять середньоквадратичну похибку середнього арифметичного

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\Delta x_i\right)^2}{n\left(n-1\right)}}, \qquad (9)$$

і збільшують її в t раз (t – так званий коефіцієнт Ст'юдента. Цей коефіцієнт було введено в 1908 році англійським математиком та хіміком В.С. Госсетом). Величину

$$\Delta x_i = \overline{x} - x_i \quad , \qquad (10)$$

називають випадковим відхиленням. Середнє квадратичне похибка результату серії вимірювань, викликана випадковими відхиленнями Δxі, визначається як

$$\Delta x_{ср.кв.} = \sqrt{\frac{\sum_{s=1}^{n} \left(\Delta x_i\right)^2}{n(n-1)}} \,. \qquad (11)$$

Множимо знайдене значення коефіцієнта Стьюдента t (коефіцієнт Стьюдента, залежить від α і кількості вимірів n) на середню квадратичну похибку середнього значення, знаходимо випадкову похибку Δxвип результатів прямих вимірювань

$$\Delta x_{вип.} = t \cdot \sqrt{\frac{\sum_{s=1}^{n} \left(\Delta x_i\right)^2}{n(n-1)}} \,. \qquad (12)$$

Таблиця 1

n\α	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
2	0,73	1,00	1,38	2,0	3,1	6,3
3	0,62	0,82	1,06	1,4	1,9	2,9
4	0,58	0,77	0,98	1,3	1,6	2,4
5	0,57	0,74	0,99	1,2	1,5	2,1
6	0,56	0,73	0,92	1,2	1,5	2,0
7	0,55	0,72	0,91	1,1	1,4	1,9
8	0,55	0,71	0,90	1,1	1,4	1,9
9	0,54	0,71	0,89	1,1	1,4	1,9
10	0,54	0,70	0,88	1,1	1,4	1,8

20	0,58	0,69	0,86	1,1	1,3	1,7
∞	0,52	0,67	0,84	1,0	1,3	1,6

Похибки засобів вимірювання

До засобів вимірювань належать вимірювальні прилади та установки. Кожен прилад дає похибку, так як його неможливо зробити ідеальним. Похибка засобів вимірювання не перевищує деякої величини. Цю величину називають межею основної допустимої похибки вимірювального приладу (МОДП). МОДП на засоби вимірювання встановлюється державними стандартами і визначається у вигляді абсолютних, відносних та приведених похибок.

Абсолютна похибка приладу δ – це є різниця

$$\delta = a - X \quad , \qquad (13)$$

де а – показання приладу, Х – справжнє значення вимірюваної величини. Взагалі δ дорівнює ціні найменшої поділки інструмента. Наприклад: для лінійки δ =1 мм.

Відносна похибка вимірів – це відношення

$$\varepsilon = \frac{\delta}{X} \; . \qquad (14)$$

Як правило, вона визначається у відсотках

$$\varepsilon = \frac{\delta}{X} \cdot 100\ \% \; . \qquad (15)$$

Приведена похибка вимірювання або клас точності визначається відношенням

$$\gamma = \frac{\delta}{D} \cdot 100\ \% \; , \qquad (16)$$

і визначається у відсотках. D – максимальне значення шкали інструмента. Наприклад: сила струму вимірюється амперметром з діапазоном 0 ÷ 1 А, клас точності 0,5. Це означає, що Хн = 1 А; γ = 0,5 % і

$$\delta = \frac{\delta \cdot D}{100} = \frac{0{,}5 \cdot 1A}{100} = 5 \cdot 10^{-3} A .$$

Якщо амперметр показує 0,3 А , тоді

$$\varepsilon = \frac{5 \cdot 10^{-3} A}{0{,}3 A} \cdot 100\ \% = 1{,}7\% \; .$$

Похибки табличних величин

Похибка табличної величини визначається за формулою

$$\Delta x_{табл} = \alpha \cdot \nu , \qquad (17)$$

де α - довірча ймовірність; ν - половина ціни розряду останньої залишеної цифри табличної величини. Наприклад: величина π дорівнює 3,14. В цьому випадку ν = 0,005 і

$$\Delta x_{табл} = \alpha \cdot 0{,}005 .$$

Якщо величина π дорівнює 3,141 і ν = 0,0005, то

$$\Delta x_{табл} = \alpha \cdot 0{,}0005 .$$

При користуванні вимірювальними приладами виникають похибки відліку. Типово, похибка відліку дорівнює половині ціни поділки шкали приладу. Наприклад: лінійка має похибку відліку ν = 0,5 мм.

Правила округлення і виконання наближених обчислень

Точність обчислень завжди повинна відповідати точності вимірів. Зайва арифметична точність обчислень не позитивна якість, а недолік в роботі. Наприклад, якщо середнє арифметичне значення товщини пластинки після розрахунку було взято рівним 2,2543 мм при абсолютній похибці вимірів 0,03 мм, то при цьому показане лише невміння виконувати арифметичні дії з наближеними числами. Щоб не витрачати даремно часу для одержання сумнівної арифметичної точності, необхідно всі отримані величини перед підстановкою в формули округляти, залишаючи в них на одну значущу цифру більше, ніжу самої з наближених величин (з найменшим числом знаків). При округленні наближеного числа необхідно відкидати останні цифри, якщо перша з цифр, що відкидаються, менша 5, і додавати одиницю до попередньої цифри, якщо перша з цифр, що відкидаються, 5 або більше.

За написаним числом, що виражає результат виміру або обчислення, можна говорити про ступінь точності.

Значущі цифри – це усі цифри, крім нулів, що стоять перед числом, і нулів, поставлених наприкінці записаного результату замість відкинутих цифр при округленні.

Десяткові таки числа – це усі цифри, розміщені праворуч від коми. Наприклад, число 25,002 має п'ять значущих цифр, а десяткових знаків три; число 0,0034 має дві значущі цифри, але чотири десяткових знаки.

Якщо обчислення за наближеними даними проводяться у декілька дій, то в проміжних діях треба зберігати на одну значущу цифру більше в порівнянні з точністю визначуваних величин у даному досліді (тобто дві сумнівні цифри). У всіх арифметичних діях над наближеними числами в остаточному результаті треба уберігати стільки десяткових знаків, скільки їх мають наближені дані з найменшим числом десяткових знаків .

Округлення чисел у процесі обчислення призводить до систематичної похибки. Відносна похибка, яку знаходять в результаті обчислень, має бути приблизно на порядок (тобто у 10 разів) менша за похибку результату непрямих вимірювань.

У записі результату вимірювань залишають одну (максимум дві) сумнівні цифри. Похибку вимірювань округляють до однієї значущої цифри, якщо ця цифра не «1». Якщо ж ця цифра «1», то у похибці залишають дві значущі цифри, в записі результату вимірювань – дві сумнівні цифри. Сумнівними називаються значущі цифри в записі результату вимірювань, десяткові розряди яких збігаються з десятковими розрядами значущих цифр у записі похибки цього результату.

Розряди останніх цифр Δx і x мусять співпадати. Для цього округляють x або приписують до нього невистачаючі нулі справа. Е округляють по тим же правилам, що і Δx. Спочатку округляють Δx, Δx=0,3 мм. Розряд останньої цифри Δx - десяті долі, а $\bar{x}$ – соті долі. Округляємо $\bar{x}$ до десятих долів. Маємо $\bar{x}$ = 73,6 мм.

Знаходимо E:

$$E = \frac{\Delta X}{X} \times 100\% = \frac{0{,}3}{73{,}6} \times 100\% = 0{,}393\% = 0{,}4\%$$

Кінцевий результат x = 173,6 ± 0,3 мм , α = 0,7 , E = 0,4 %

5 Похибки прямих вимірювань

Похибки прямих вимірювань визначаються за формулою

$$\Delta x = \sqrt{(t_\infty \cdot \frac{\delta}{3})^2 + (\alpha \cdot \nu)^2}\text{ , n = 1,} \qquad (18)$$

якщо деяку величину виміряти один раз.

Якщо вимірювання виконувались n раз , то

$$\Delta x = \sqrt{(t_\infty \cdot \frac{\delta}{3})^2 + (\Delta x_{вип.})^2}\text{ , n >} \qquad (19)$$

В цих рівняннях t∞ - коефіцієнт Стьюдента для заданого α при необмеженому числі вимірів; δ - похибка приладу; ν - похибка відліку, $\nu = \delta / 2$.

Наприклад: довжина тіла була виміряна 3 рази:

n	x, мм	Δxi , мм	(Δxi)²
1	12,8	0,446	0,217
2	13,6	0,334	0,111
3	13,4	0,134	0,018
$\bar{x}$=13,2		∑(Δxi)²=0,3	

$$\Delta X = \sqrt{(t_\infty \cdot \frac{\delta}{3})^2 + (\Delta X_{вип})^2} = \sqrt{(1 \cdot \frac{1}{3})^2 + 1{,}4^2 \cdot \frac{0{,}346}{3 \cdot 2}} = 0{,}473\text{ мм.}$$

Відносна похибка дорівнює

$$E = \frac{0{,}473}{13{,}266} \cdot 100\,\% = 3{,}56\,\% \text{ .}$$

Кінцевий результат: x = (13,3 ± 0,3) мм ; α = 0,7 ; E = 3,6 %.

6 Похибки непрямих вимірювань

Якщо y - величина, що вимірюється посередньо, її розраховують за відомою залежністю y=f(x1,x2,…xn) від змінних x1,x2,,…xn, які вимірюють безпосередньо.

Похибки непрямих вимірів визначаються за формулою:

$$\Delta y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \Delta x_i)^2}\text{ ,} \qquad (20)$$

якщо функціональна залежність досліджуваної величини є багаточлен.

Похибки непрямих вимірів можна визначати

$$E = \frac{\Delta y}{\bar{y}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \ln f}{\partial x_i} \cdot \Delta x_i\right)^2} , \qquad (21)$$

$$\Delta \Pi = \sqrt{[(\frac{V^2}{2} + g \cdot h) \cdot \Delta m]^2 + (m \cdot V \cdot \Delta V)^2 + (m \cdot h \cdot \Delta g)^2 + (m \cdot g \cdot \Delta h)^2} .$$

якщо функціональна залежність досліджуваної величини є одночлен і потім знаходимо Δy як: $\Delta y = E \cdot \bar{y}$. Наприклад:

Якщо залежність функції $\Pi = \frac{m \cdot V^2}{2} + m \cdot g \cdot h = f(m, V, g, h)$, тоді

$$\frac{\partial f}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial m}(\frac{m \cdot V^2}{2} + m \cdot g \cdot h) = \frac{V^2}{2} + g \cdot h,$$

$$\frac{\partial f}{\partial V} = \frac{\partial}{\partial V}(\frac{m \cdot V^2}{2} + m \cdot g \cdot h) = m \cdot V,$$

$$\frac{\partial f}{\partial g} = \frac{\partial}{\partial g}(\frac{m \cdot V^2}{2} + m \cdot g \cdot h) = m \cdot h,$$

$$\frac{\partial f}{\partial h} = \frac{\partial}{\partial h}(\frac{m \cdot V^2}{2} + m \cdot g \cdot h) = m \cdot g$$

Тоді

$$\Delta \Pi = \sqrt{[(\frac{V^2}{2} + g \cdot h) \cdot \Delta m]^2 + (m \cdot V \cdot \Delta V)^2 + (m \cdot h \cdot \Delta g)^2 + (m \cdot g \cdot \Delta h)^2} .$$

Якщо залежність функції: $\Pi = m \cdot g \cdot h = f(m, g, h)$,

$$\ln \Pi = \ln m + \ln g + \ln h$$

$$\frac{\partial \ln \Pi}{\partial m} = \frac{1}{m}$$

$$\frac{\partial \ln \Pi}{\partial g} = \frac{1}{g}$$

$$\frac{\partial \ln \Pi}{\partial h} = \frac{1}{h}$$

Тоді

$$E = \frac{\Delta \Pi}{\Pi} = \sqrt{(\frac{\Delta m}{m})^2 + (\frac{\Delta g}{g})^2 + (\frac{\Delta h}{h})^2} ,$$

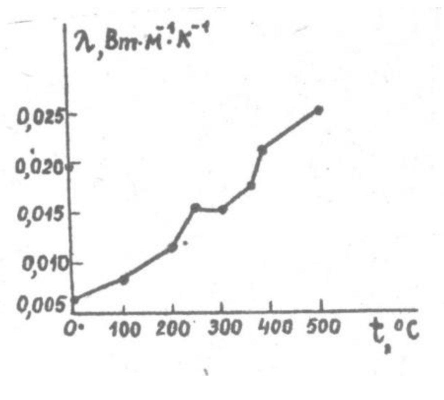
$$\Delta \Pi = E \cdot \overline{\Pi} .$$

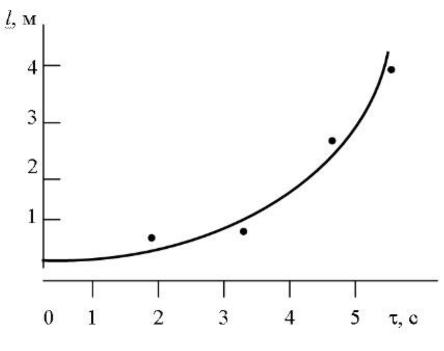
У результаті отримуємо

$$\Pi = \overline{\Pi} \pm \Delta \Pi , \alpha , E .$$

7 Графічне відображення експериментальних результатів

Графік будується у програмі Exel. На рисунках нижче можна побачити приклади графіків.





невірно

вірно

Лабораторна робота №2
Математична обробка результатів досліду

Безпосередні первинні результати вимірювань не завжди є достатньо наочними, компактними і зручними для сприйняття і подальшого використовування.
Тому необхідно вибирати і використовувати найбільш відповідні методи їх обробки і форми уявлення.
Звичайно прийняті такі форми представлення результатів вимірювань: таблиці, графіки, діаграми, гістограми, номограми.
Таблиці – найпростіший спосіб представлення результатів вимірювань в дискретній цифровій формі запису інформації.
Достоїнства табличної форми: можливість збереження і витягання первинних даних, великий об'єм інформації, легкість перестроювання.
Таблиці можуть служити основою для виразу результатів вимірювань в інших формах. Графіки, діаграми, гістограми, номограми є похідними від таблиць і містять лише частину інформації, якою володіють таблиці.
Недоліки таблиць полягають в їх малій наочності, неможливості чітко виявити ті або інші закономірності, мінімуми і максимуми і т.д.
Графік – ілюстроване кількісне плоске представлення залежності однієї або декількох величин від значень інших величин. Узагальнено, графік є поверхня в об'ємі багатовимірного простору, але навіть тривимірні графіки – це велика рідкість. Частіше за все графіки будують в декартових координатах – прямокутна система, осі якої називають "абсциса" і "ордината". Іноді для більшої виразності (особливо для кутових величин) графіки будуються в полярних координатах. Перевагами графіків є їх наочність, виявлення особливих точок і тенденцій, навіть в тих випадках, коли аналітичний зв'язок між досліджуваними величинами відсутній.
Недоліки графіків: можливість часткової втрати первинних числових даних, деяка неоднозначність при побудові, труднощі відображення залежності від декількох змінних.
Діаграма – один з видів графіків, коли структура явища або процесу для наочності виражається у вигляді відрізків, елементів площі або фігур умовно вибраних розмірів.
Діаграми бувають: лінійними (будуються як графіки в декартовій системі); стовпчиковими, секторіальними (циклічними).
Ефект виразності діаграм можна усилити їх штрихуванням або розфарбовуванням – тому вони дуже наочні.
Недоліки: труднощі витягання цифрової інформації (тому іноді діаграми містять і деякі цифри), невизначеність поведінки функції між вибраними інтервалами.
Гістограма – наочне представлення результатів вимірювань при використовуванні статистичних методів їх обробки з метою опису частоти (вірогідність) знаходження якої-небудь величини в заданому інтервалі значень (криві розподілу).
Номограмма – допоміжна графічна побудова, що служить для віддзеркалення спеціальної функціональної залежності і для проведення розрахунків. Іноді її називають калькулятором.
Типовий приклад номограми – логарифмічна лінійка.

Деякі рекомендації, які бажано дотримувати при побудові графіків і інших форм:
- масштаб шкали треба вибирати так, щоб крива на графіку займала все поле креслення;
- експериментальні крапки не повинні зливатися;
- графік повинен будуватися з урахуванням погрішності вимірювань. Якщо ж погрішність велика, від проведення від проведення ліній слід утриматися;
- бажано вибирати масштаб так, щоб основна частина графіка проходила під кутом, близьким до 450;
- на експериментальних графіках обов'язково наносяться крапки;
- при невеликій кількості точок їх рекомендується сполучати суцільною лінією, особливо якщо чіткій закономірності не виявляється;
- при проведенні плавної (лекальної) лінії слід прагнути того, щоб вона мала по можливості менше особливих і екстремальних точок. Приблизно половина точок повинна лежати вище, друга половина точок – нижче за плавну лінію.

Результат вимірювань, отриманий у вигляді безпосереднього відліку або обчислень, часто виражається у вигляді цілих чисел або десяткових дробів і, як правило, округлюється.

Підбір формул і лінеаризація графіків

Часто в результаті досліду зв'язок між деякими величинами виявляється у вигляді таблиці, у якій для кожного значення X, при якому проводилось вимірювання (умови досліду), поставлене відповідне значення Y, знайдене шляхом вимірювань. Задані так функції можуть далі, наприклад, диференціюватися, інтегруватися, можуть знадобитися значення функції при проміжних, не вписаних у таблицю, значеннях незалежної змінної (задачі інтерполяції) чи при значеннях незалежної змінної, що знаходяться за межами таблиці (задача екстраполяції).

Для вирішення цих задач зручніше скористатися математичною залежністю між X і Y, заданою у вигляді формули. Формулу, підібрану за експериментальними даними, називають емпіричною формулою. Формула тим ліпша, чим більше теоретичних уявлень вкладено в неї.

Спочатку задаються видом формули, потім, скориставшись результатами сталих величин, що входять у формулу. Перед тим, як приступити до підбора формули, необхідно нанести дослідні дані на графік, після чого на око, від руки провести через отримані точки найбільш правдоподібну криву. При цьому відразу виявляються ті дані, в яких можна підозрювати великі помилки. Дуже важливо при проведенні кривої, крім експериментальних точок, використовувати загальні розуміння про те, як повинна поводитися крива при значеннях аргументу, близьких до нуля, при дуже великих значеннях аргументу, поблизу початку координат, біля координатних осей (чи торкається їх, чи перетинає їх і т.п.).

Коли попередня робота проведена й обрано вид формули, можна визначити сталі коефіцієнти. Це роблять за допомогою методу найменших квадратів [1-3], однак він приводить до досить громіздких обчислень, особливо коли шукані параметри входять не лінійно. Тому в практичній роботі найчастіше більш ефективними виявляються графічні методи підбору формул.

Пряма лінія займає надзвичайний стан у графічному методі і надійно проводиться за даними точкам. Рівняння прямої лінії має вигляд:
Y = kX + b,
де числа k і b мають простий геометричний зміст: b – величина відрізка, що відтинається на осі Y, k – тангенс кута нахилу прямої до осі X. Отже, побудувавши графік, ми визначимо b і k.
Велика перевага графічного методу зв'язана з його наочністю.
Якщо експериментальні точки лягають на пряму, за винятком окремих точок, що випали, то ці точки наочно і можуть бути перевірені особливо ретельно.
Якщо експериментальні точки не лежать на прямій, то це також видно з графіка. У цьому випадку залежність між X і Y більш складна, ніж Y = kX + b.
Як же підібрати константи, що входять у формулу, якщо вона має більш складний вид, ніж пряма?
Загальна ідея графічного методу полягає в тому, що треба ввести нові змінні так, щоб у цих змінних залежність, що нас цікавить, ставала лінійною. Тому метод іноді називають методом лінеаризації графіка чи просто методом вирівнювання.
Наприклад, часто зустрічається залежність виду
$Y = aX + bX^2$.
Розділивши всі члени на X:
$\frac{Y}{X} = a + bX$ і поклавши $Z = \frac{Y}{X}$, одержуємо лінійну залежність Z від X.
Або нехай $Y = aX^n$. Логарифмуючи праву і ліву частини $\lg Y = \lg a + n \lg X$, і ввівши нові змінні Z=lg і t=lg одержимо Z = lg a + nt. З графіка Z(t) легко знайдемо a і n.
Однак, якщо в нових змінних експериментальні точки не лягають на пряму, те це значить, що вид формули обраний невдало і для опису експериментальних даних треба підібрати формулу іншого виду.
Якщо немає теоретичних засад для підбора формули, звичайно вибирають функціональну залежність з числа найбільш простих, порівнюючи їхні графіки з графіками заданої функції. Через те, що подібність графіків визначена грубо, на око, потрібно, вибравши формулу, перш ніж визначати значення параметрів, перевірити можливість її застосування методом вирівнювання.
Якщо емпіричну формулу відшукати не вдається, то часто бувають корисні операції безпосереднього графічного інтегрування, диференціювання, графічний розв`язок рівнянь та ін.

Порядок виконання роботи

1. Відкрити Excel.

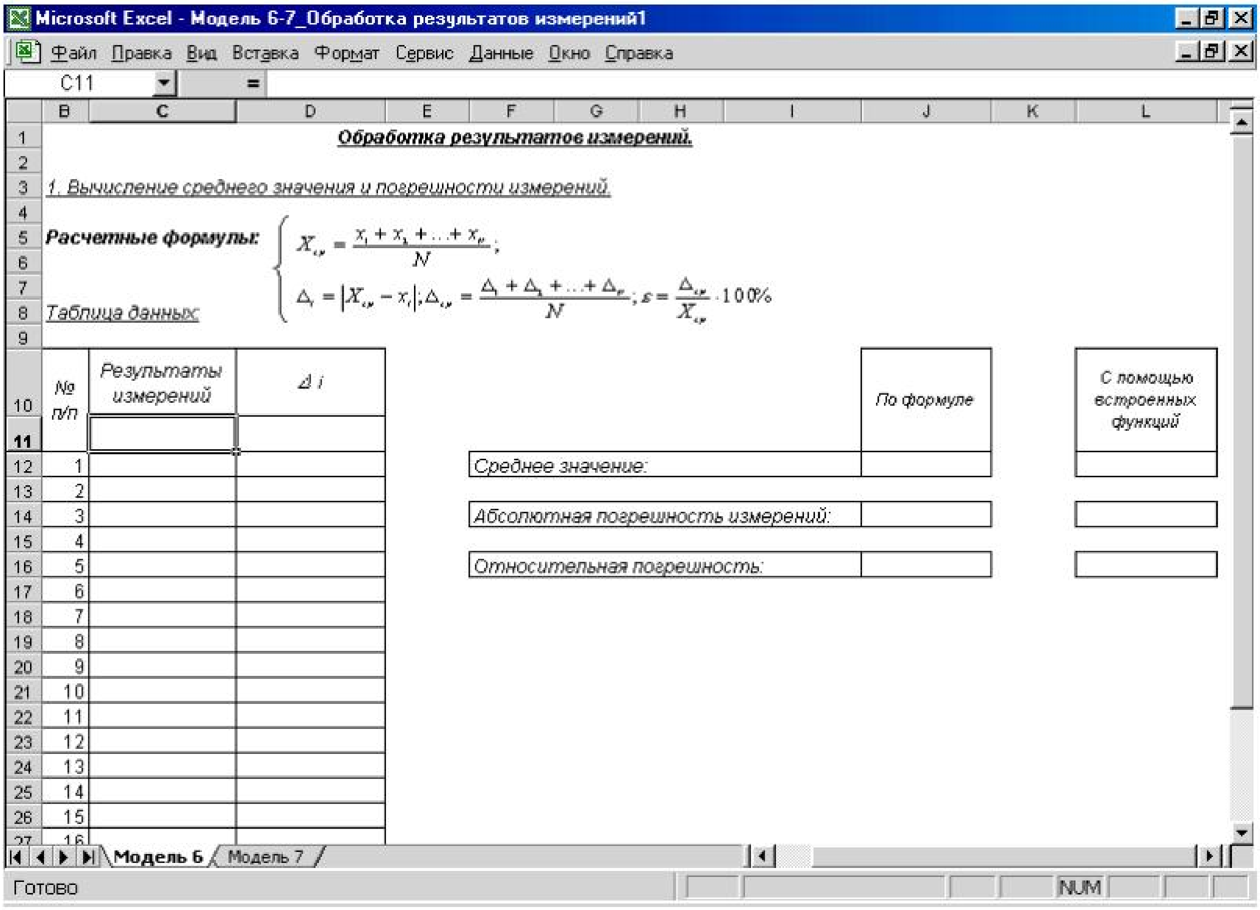
2. Побудувати графіки довільних залежностей для наступних даних.

x, м	*y, м*	*x, м*	*y, м*	*ΔT, K*	*E, B*	*t, c*	v, *м/с*	*B, Тл*	Δφ, *B*
-1	15,81	-2	-3,44	-5	2,10	0	-0,61	3	-0,99
1	15,14	-1	0,86	-4	1,11	1	0,17	4	0,16
3	11,47	0	5,23	-3	4,94	2	4,56	5	2,30
5	22,93	1	-0,46	-2	7,46	3	7,77	6	4,96
7	13,26	2	6,90	-1	7,82	4	9,16	7	3,55
9	19,52	3	7,57	0	9,65	5	8,12	8	5,30
11	17,67	4	4,79	1	12,79	6	13,79	9	4,34
13	28,60	5	7,45	2	15,03	7	13,63	10	8,19
15	32,63	6	4,39	3	18,29	8	17,65	11	6,43
17	27,83	7	7,32	4	16,07	9	19,80	12	8,91
19	34,64	8	10,26	5	21,79	10	20,02	13	8,22
21	36,11	9	10,71	6	23,60	11	21,16	14	10,01
23	35,25	10	9,12	7	22,09	12	21,75	15	10,21
25	39,42	11	14,48	8	28,12	13	25,40	16	13,93
27	34,53	12	11,86	9	25,62	14	29,15	17	11,92
29	45,56	13	15,89	10	31,44	15	28,45	18	16,09
31	36,53	14	19,17	11	29,85	16	32,69	19	15,93
33	45,38	15	18,40	12	32,25	17	36,05	20	15,53
35	49,30	16	21,82	13	33,54	18	37,77	21	16,67
37	52,83	17	16,73	14	40,27	19	36,52	22	16,78
39	56,57	18	22,84	15	37,92	20	37,56	23	18,17
41	46,49	19	21,63	16	40,42	21	44,29	24	19,34
43	47,72	20	22,41	17	45,79	22	45,96		
45	58,08	21	24,19			23	46,80		
47	59,84								

3. Провести лінію тренда.
4. Лінеаризувати графік, знайти коефіцієнти a і b.

Лабораторна робота № 3.
Обробка результатів вимірювань і моделювання лінійно залежних двох взаємопов'язаних величин (частина1).

1. Запустити Excel.
2. Побудувати наступні таблиці:



Таблиця даних, наведена на аркуші, виконана для 20 значень величини x, однак при необхідності її можна продовжити. Постійними величинами в даному випадку є кількість вимірювань N і середнє значення виміряної величини.

1. Припустимо, що в результаті експерименту було отримано N значень деякої фізичної величини x. Позначимо через x, результат i-го вимірювання величини x. За найбільш ймовірне значення вимірюваної величини приймають її середнє арифметичне значення, обчислене з усього ряду вимірюваних значень:

$$X_{\text{ср}} = \langle x \rangle = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

Кожне окремо взяте вимірювання відрізняється від середнього. Модуль різниці середнього значення (x) і результату цього вимірювання називають абсолютною похибкою окремого вимірювання:

$$\Delta_i = \left| \langle x \rangle - x_i \right|.$$

Середня абсолютна похибка:

$$\Delta_{cp} = \langle \Delta \rangle = \frac{\Delta_1 + \Delta_2 + ... + \Delta_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \Delta_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \left| \langle x \rangle - x_i \right|}{N}$$

Абсолютна похибка вимірюється в тих же одиницях, що і вимірювана величина. Відносна похибка експерименту:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta_{cp}}{X_{cp}} \cdot 100\%$$

характеризує якість вимірювань і є безрозмірною величиною.

Згідно з правилами запису результату вимірювань остаточний результат експерименту повинен бути представлений у вигляді:

$$x = \langle x \rangle \pm \langle \Delta_x \rangle;\ \varepsilon_x$$

При записі результату слід керуватися наступними правилами:

• Виміряне значення величини і похибка повинні бути представлені в одних і тих же одиницях.

• Під час запису абсолютної похибки слід заокруглювати її величину до двох значущих цифр, якщо перша з них є одиницею, і до однієї значущої цифри у всіх інших випадках.

• Чисельне значення результату вимірювань завжди округлюють або уточнюють так, щоб його остання цифра виявилася в тому ж розряді, що і цифра похибки. 1,2 ± 0,2; 1,24 ± 0,03; 81,20 ± 0,01; 1,243 ± 0,012; 0,900 ± 0,004; (396,2 ± 0,5) • 102 і т.д.

• Відносну похибку завжди округлюють до двох значущих цифр.

2. Занести вихідні дані в наступні комірки:

1) в C11: назва та одиниці вимірювання фізичної величини x;

2) в D11: одиниці виміру абсолютної похибки;

3) в діапазон (C12: C31): виміряні в результаті експерименту значення фізичної величини x (див. Нижче таблиці з прикладами вимірювань. Якщо у вас немає власних даних, скористайтеся цими таблицями.). Зверніть увагу, що кількість даних в таблицях різна.

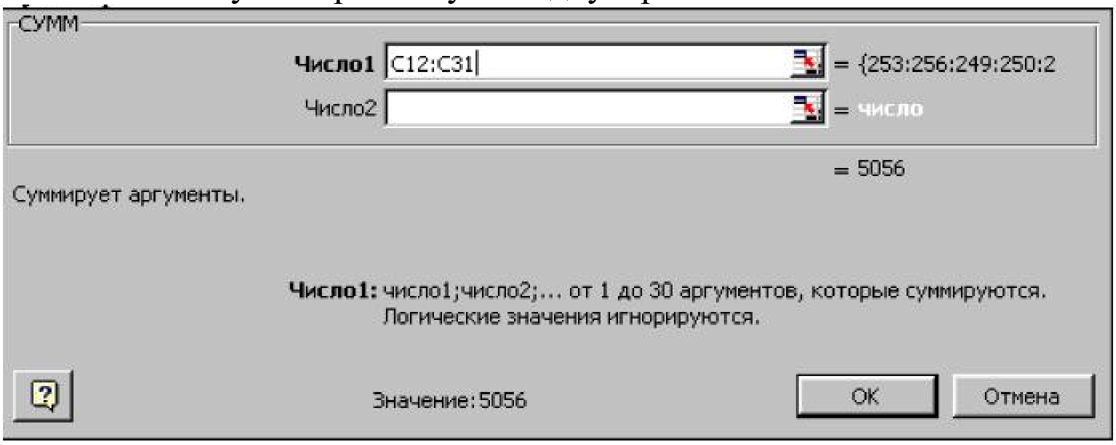
№№	*R, Ом*	*V, м³*	*L, м*	v, *м/с*	*I, мА*	*E, В*
1	283	3283	0,86	1909	0,63	5,56
2	312	3312	0,72	1875	0,58	5,58
3	322	3322	0,79	1899	0,74	5,55
4	285	3285	0,77	1845	0,78	5,56
5	292	3292	0,60	1949	0,70	5,56
6	286	3286	0,70	1913	0,74	5,59
7	278	3278	0,65	1836	0,75	5,55
8	285	3285	0,69	1884	0,82	5,54

9	306	3306	0,73	1842	0,68	5,56
10	296	3296	0,77	1874	0,69	5,57
11	264	3264	0,72	1949	0,76	5,56
12	282	3282	0,79	1931	0,62	5,57
13	300	3300	0,65	1948	0,72	5,59
14	305	3305	0,66	1909	0,88	5,60
15	279	3279	0,70	1911	0,65	5,56
16	277		0,74	1895	0,81	5,55
17	283		0,84	1942	0,79	5,56
18	292		0,76		0,77	5,56
19	278		0,80		0,66	
20	266				0,76	

3. Розрахунки зазначених вище величин (середнього значення, середньої абсолютної похибки і відносної похибки) провести двома способами: користуючись формулами і вбудованими функціями.

1 спосіб.

Розрахунок середнього значення. Внести формулу для розрахунку середньоарифметичного значення в комірку J12. При створенні формули використовувати вбудовану функцію СУММ (), де як аргумент вказати діапазон комірок, що містять числові дані (тобто виміряні значення). Число виміряних значень N в кожному конкретному випадку є різним.



Розрахунок абсолютної похибки. Для обчислення середньої абсолютної похибки необхідно провести проміжні розрахунки, а саме: попередньо розрахувати абсолютні похибки окремих вимірів (див. Визначення та розрахункові формули), використовуючи функцію ABS (), яка обчислює модуль аргументу, зазначеного в дужках. Формула заноситься в комірку D12 і потім копіюється в діапазон нижчих комірок цього стовпчика.

Розрахувати в комірці J14 середню абсолютну похибку.

Після завершення створення формули призначити комірці J14 експонентний формат (Формат-Комірка ..., вкладка Число) з такою кількістю десяткових знаків, щоб абсолютна похибка містила 1-2 значущі цифри відповідно до наведених вище правил.

Розрахунок відносної похибки. Формулу для розрахунку відносної похибки ввести в клітинку J16. Після підтвердження введення призначити даній комірці

процентний формат з такою кількістю десяткових знаків, щоб відносна похибка містила дві значущі цифри.
2 спосіб.
Розрахунок середнього значення з використанням вбудованої функції СРЗНАЧ (). Обчислити середнє значення виміряної величини за допомогою вбудованої функції СРЗНАЧ () (категорія Статистичні) в комірці L12. Як аргумент цієї функції можна використовувати числа, імена, масиви або посилання на комірки, що містять числові дані. При цьому, якщо аргумент, який є масивом або посиланням, містить тексти, логічні значення або порожні клітинки, то такі значення ігноруються; однак, комірки, які містять нульові значення, враховуються. У нашому випадку аргументом є діапазон комірок стовпчика З таблиці.
Порівняти отримане значення з розрахованим в комірці J12.
Розрахунок середньої абсолютної похибки з використанням вбудованої функції СРОТКЛ ().
Обчислити середню абсолютну похибку за допомогою вбудованої функції СРОТКЛ () (категорія Статистичні) в осередку L14. Синтаксис її повністю аналогічний функції СРЗНАЧ.
Аргументом цієї функції буде той же самий діапазон комірок в стовпці С, що і в попередньому випадку.
Неважко бачити, що другий спосіб створення формул краще по ряду причин: по-перше, він не вимагає проміжних обчислень (як, наприклад, абсолютних похибок окремих вимірювань - це означає відсутність додаткового стовпчика D); по-друге, скорочує кількість кроків по створенню формули, оскільки не вимагає такої кількості даних, як перший спосіб (так, наприклад, тут не потрібно вводити число даних - воно підраховується автоматично, а також відпадає необхідність в операції ділення); по-третє, другий спосіб дозволяє виділяти діапазон, в якому частина осередків буде незаповнена або містити текст - такі осередки при розрахунку середніх значень і похибок ігноруються. Так, в наших прикладах можна скласти одну формулу для діапазону комірок С12: С31, незалежно від того, яка частина комірок з цього діапазону заповнена, можна навіть вказати цілком стовпець (С: С). У першому ж способі необхідно кожен раз вираховувати кількість заповнених комірок.
Відносну похибку в комірці L16 розрахувати за визначенням цієї величини.
В результаті обчислень можуть виходити числа, що містять досить велику кількість цифр, що неприпустимо при записі похибок. Тому необхідно призначити даним коміркам (L14, L16) потрібний формат (експоненціальний, числовий або процентний) з відповідним числом десяткових знаків. Середнє значення при записі остаточного результату округлюється відповідно до правил, зазначеними у вступі. У більшості випадків зручнішим за все виявляється експонентціальний формат.

Лабораторна робота № 4.
Обробка результатів вимірювання і моделювання лінійної залежності двох взаємопов'язаних величин (частина 2).

Припустимо, що в результаті експерименту було отримано N пар значень двох взаємопов'язаних величин x і y: (x ,, y,) (i = 1, 2, ..N) і з теорії відомо, що ці величини пов'язані між собою лінійною залежністю виду : утеор = ax + b. Однак через похибки вимірювальних приладів, а також наявності якихось випадкових факторів значення вимірюваних величин будуть відрізнятися від справжніх. В результаті, якщо нанести результати експерименту на графік, то точки будуть мати деякий розкид, тому неможливо знайти таку пряму, яка проходила б через всі експериментальні точки. З аналітичної точки зору завдання обробки результатів вимірювань полягає в знаходженні параметрів a і b, при яких рівняння утеор = ax + b (1) описує дані експерименту найкращим чином. Один з можливих методів визначення цих параметрів називається методом найменших квадратів.
Введемо різницю значень величини yi (отриманої з експерименту) і yi розр. Для кожного і -го значення ця різниця має вид

$$r_i = y_i^{расч} - y_i \,.$$

Якщо значення коефіцієнтів a і b підібрані найкращим чином, то близько половини точок буде лежати вище розрахованої прямої, а інша половина точок - нижче прямої. Оскільки значення r_i можуть бути як більше, так і менше нуля, вводять величину квадрата різниці значень r_i^2, де

$$r_i^2 = \left(y_i^{расч} - y_i\right)^2 .$$

Критерій найкращого опису експериментальних даних (критерій Лежандра) полягає в тому, щоб сума виду

$$\sum_{i=1}^{N} (r_i)^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(y_i^{расч} - y_i\right)^2 ,$$

була мінімальною (тут N - число вимірювань).
Підставивши рівняння (1) у (2):

$$\sum_{i=1}^{N} (r_i)^2 = \sum_{i=1}^{N} (ax_i + b - y_i)^2 .$$

Отже, завдання полягає в тому, щоб знайти такі коефіцієнти a і b, при яких значення виразу виду

$$\sum_{i=1}^{N} (ax_i + b - y_i)^2$$

було б мінімальним.
Знайдемо похідні по a й по b і прирівняємо їх до нуля. У загальному випадку ці вирази матимуть вигляд:

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{N} r_i^2}{\partial a} = 0; \quad \frac{\partial \sum_{i=1}^{N} r_i^2}{\partial b} = 0 .$$

Отримаємо:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sum\limits_{i=1}^{N} \left(ax_i + b - y_i\right)^2}{\partial a} = 0; \\ \dfrac{\partial \sum\limits_{i=1}^{N} \left(ax_i + b - y_i\right)^2}{\partial b} = 0. \end{cases}$$

Оскільки величини b, x і y не залежать від a, то вираз набуває вигляду:

$$\sum_{i=1}^{N} ax_i^2 + \sum_{i=1}^{N} bx_i = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i$$

Аналогічно

$$\sum_{i=1}^{N} ax_i + \sum_{i=1}^{N} b = \sum_{i=1}^{N} y_i .$$

Таким чином, ми отримали систему з двох рівнянь для знаходження коефіцієнтів a і b:

$$\begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{N} x_i + Nb = \sum\limits_{i=1}^{N} y_i . \\ a\sum\limits_{i=1}^{N} x_i^2 + b\sum\limits_{i=1}^{N} x_i = \sum\limits_{i=1}^{N} x_i y_i \end{cases}$$

Розв'язуючи систему рівнянь, отримаємо значення коефіцієнтів a і b в наступному вигляді:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} \sum y_i & N \\ \sum x_i y_i & \sum x_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum x_i & N \\ \sum x_i^2 & \sum x_i \end{vmatrix}}; \; b = \frac{\begin{vmatrix} \sum x_i & \sum y_i \\ \sum x_i^2 & \sum x_i y_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum x_i & N \\ \sum x_i^2 & \sum x_i \end{vmatrix}}.$$

Розкриваючи визначники, знаходимо вирази для a і b:

$$a = \frac{\sum x_i \cdot \sum y_i - N \cdot \sum x_i \cdot y_i}{\left(\sum x_i\right)^2 - N \cdot \sum x_i^2};$$

$$b = \frac{\sum x_i \cdot \sum x_i \cdot y_i - \sum x_i^2 \cdot \sum y_i}{\left(\sum x_i\right)^2 - N \cdot \sum x_i^2}.$$

Якщо пряма проходить через початок координат, то рівняння такої прямої y= kx і параметр k до визначається як

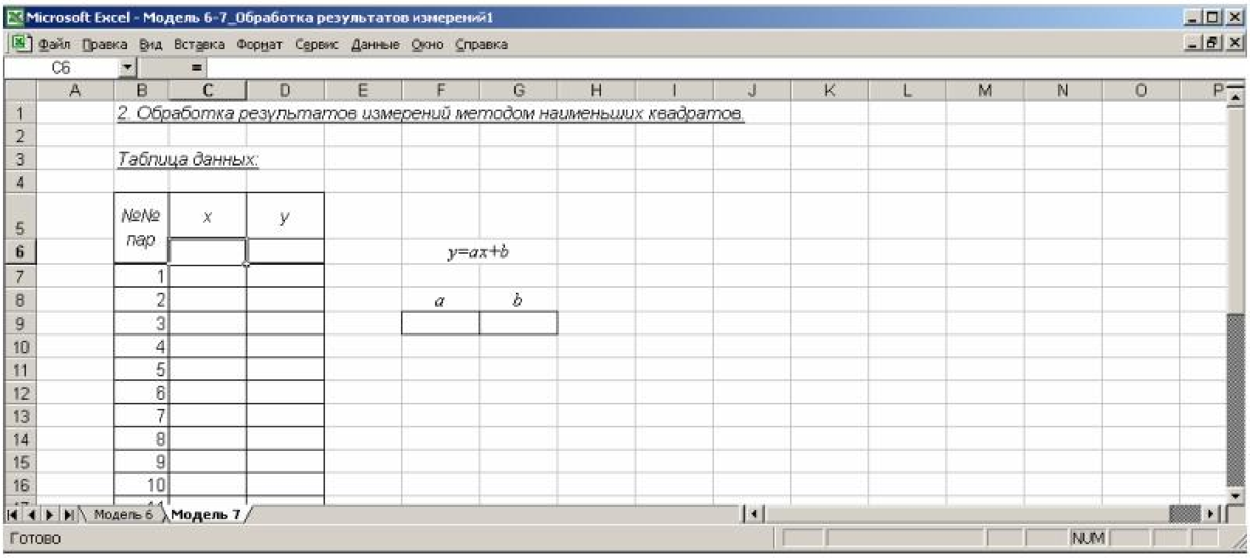
$$k = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} x_i \cdot y_i}{\sum\limits_{i=1}^{N} x_i^2}.$$

Як видно, формули для обчислення параметрів прямої досить складні, в той час як вбудовані функції Exel дозволяють провести розрахунок, не вникаючи в суть самих формул.

З погляду графіки вважається, що пряма проведена найкращим чином, якщо експериментальні точки розташовуються по обидва боки від цієї прямої приблизно на однаковій від неї відстані.

Важливо відзначити, що даний метод використовується щоразу, коли мова йде про лінійні залежності двох величин.

1. Відкрити Exel.
2. Ввести наступні таблиці:



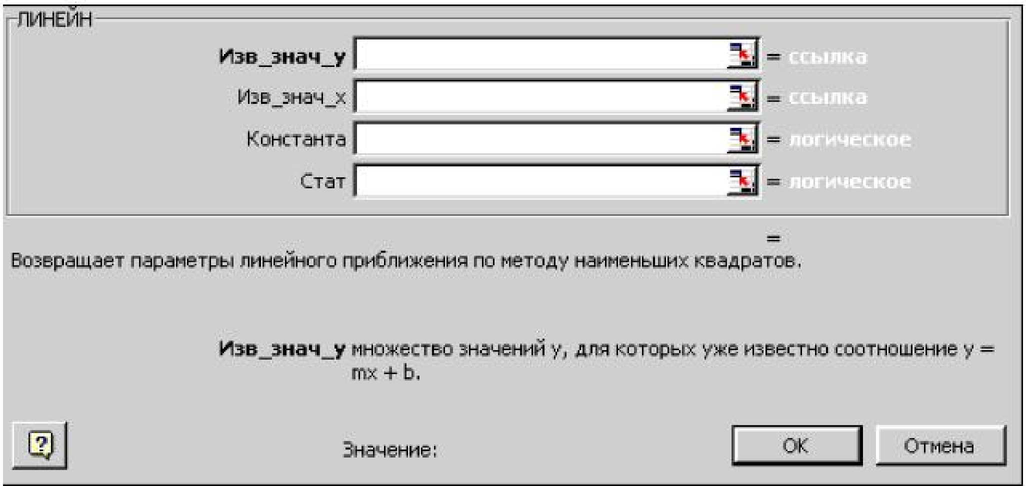
Приклади експериментальних даних:

x, м	*y, м*	*x, м*	*y, м*	*ΔT, K*	*E, B*	*t, c*	v, *м/c*	*B, Тл*	Δφ, *B*
-1	15,81	-2	-3,44	-5	2,10	0	-0,61	3	-0,99
1	15,14	-1	0,86	-4	1,11	1	0,17	4	0,16
3	11,47	0	5,23	-3	4,94	2	4,56	5	2,30
5	22,93	1	-0,46	-2	7,46	3	7,77	6	4,96
7	13,26	2	6,90	-1	7,82	4	9,16	7	3,55
9	19,52	3	7,57	0	9,65	5	8,12	8	5,30
11	17,67	4	4,79	1	12,79	6	13,79	9	4,34
13	28,60	5	7,45	2	15,03	7	13,63	10	8,19
15	32,63	6	4,39	3	18,29	8	17,65	11	6,43
17	27,83	7	7,32	4	16,07	9	19,80	12	8,91
19	34,64	8	10,26	5	21,79	10	20,02	13	8,22
21	36,11	9	10,71	6	23,60	11	21,16	14	10,01
23	35,25	10	9,12	7	22,09	12	21,75	15	10,21
25	39,42	11	14,48	8	28,12	13	25,40	16	13,93
27	34,53	12	11,86	9	25,62	14	29,15	17	11,92
29	45,56	13	15,89	10	31,44	15	28,45	18	16,09
31	36,53	14	19,17	11	29,85	16	32,69	19	15,93
33	45,38	15	18,40	12	32,25	17	36,05	20	15,53
35	49,30	16	21,82	13	33,54	18	37,77	21	16,67
37	52,83	17	16,73	14	40,27	19	36,52	22	16,78
39	56,57	18	22,84	15	37,92	20	37,56	23	18,17
41	46,49	19	21,63	16	40,42	21	44,29	24	19,34
43	47,72	20	22,41	17	45,79	22	45,96		
45	58,08	21	24,19			23	46,80		
47	59,84								

3. Внести вихідні дані в наступні комірки:
1) в C6: умовне позначення (або назва) і одиниці виміру фізичної величини x;
2) в D6: умовне позначення (або назва) і одиниці виміру фізичної величини y;
3) в діапазон (C7: C??): виміряні в експерименті значення фізичної величини x (тут символи ?? позначають номер останнього рядка, що містить числові дані). Таблиці з прикладами вимірювань наведені нижче (кількість даних в таблицях різна!);
4) в діапазон (D7: D ??): виміряні значення величини y.
Таблицю даних при необхідності можна продовжити.
4. Розрахувати параметри прямої за допомогою функції ЛИНЕЙН (). Синтаксис функції:

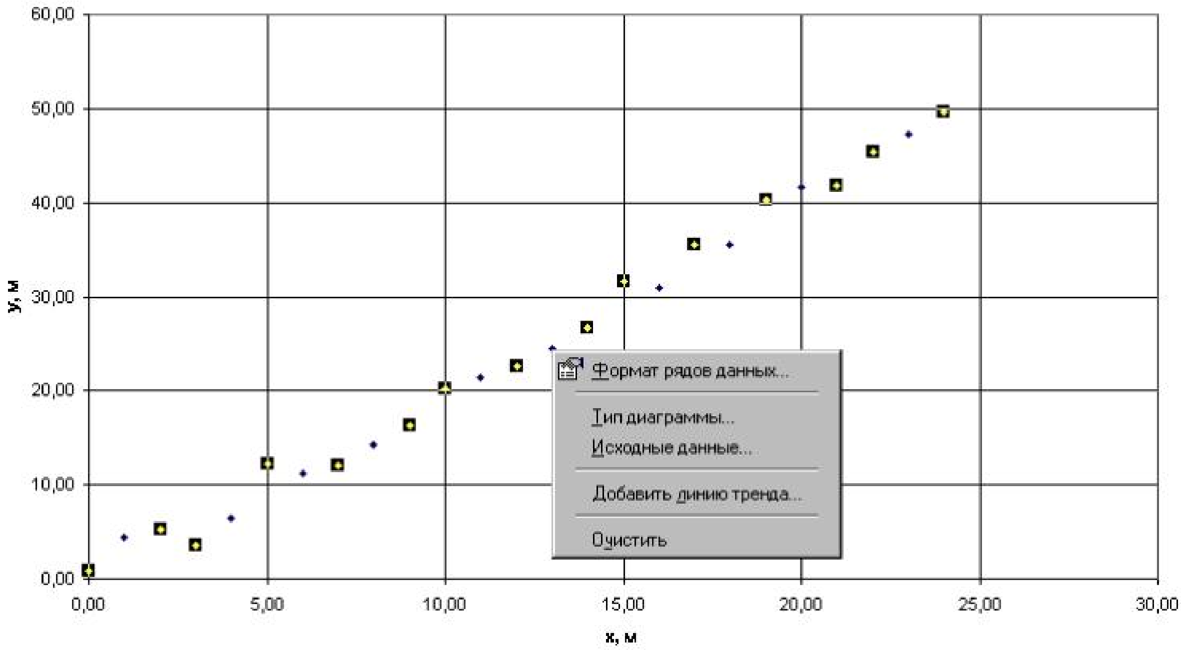
ЛИНЕЙН (изв_знач_y; изв_знач_x; константа; стат).

Функція обчислює параметри прямої за методом найменших квадратів. Робота з нею проводиться за таким планом:
- Виділити діапазон F9: G9 і виконати команду Вставка-Функція ...
- В категорії Статистичні вибрати функцію ЛИНЕЙН.

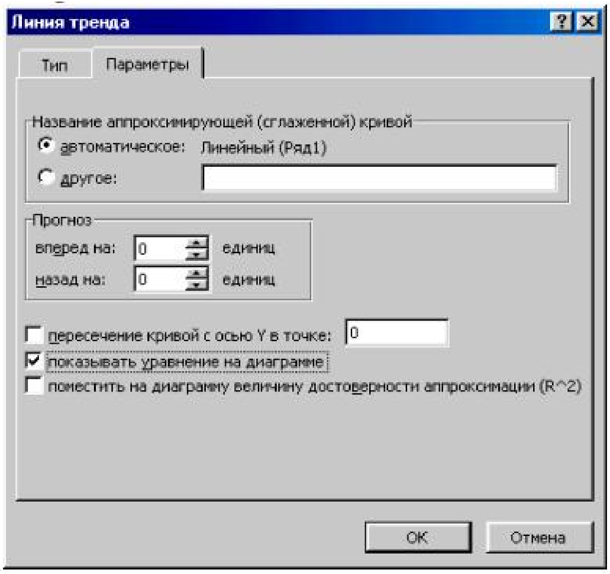


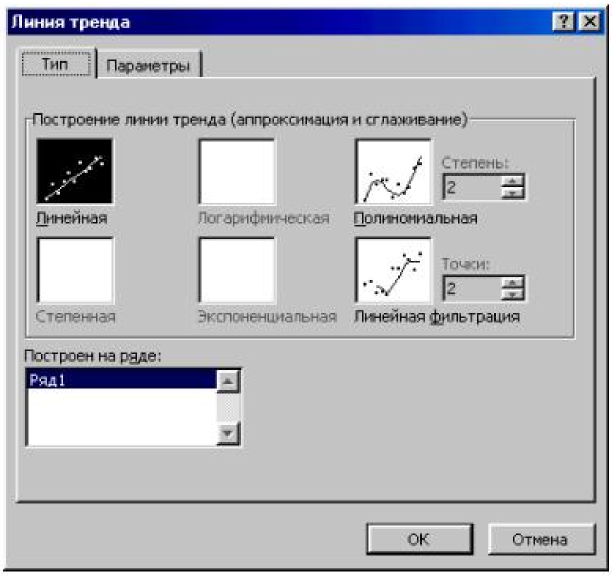
- В поле "Изв_знач_у" ввести діапазон комірок, що містять експериментально знайдені значення величини y (діапазон комірок в стовпці D, що містить значення y, отримані експериментальним шляхом).
- В поле "Изв_знач_х" - діапазон комірок, що містять значення величини x (діапазон комірок в стовпці C, що містить експериментально знайдені значення величини x). Дані масиви обов'язково повинні містити однакову кількість комірок (іншими словами, мати однаковий розмір).
- В поле Константа ввести логічне значення, яке вказує, чи потрібно, щоб константа b дорівнювала 0:
• якщо аргумент Конст має значення ІСТИНА або опущений, то b обчислюється звичайним чином;
• якщо аргумент Конст має значення ЛОЖЬ, то b ставиться рівним 0 (пряма проходить через початок координат, тобто виконується співвідношення y = kx).
- Останнє поле можна залишити порожнім.
- Щоб у завданні обчислювалися обидва параметри прямої (a і b) (для чого на робочому аркуші були виділені відразу дві комірки!), Введення формули необхідно завершити комбінацією клавіш - Ctrl + Shift + Enter.
5. Побудова графіка залежності y (x).

1. Виділити діапазон комірок, що містять числові дані, і провести побудову графіка залежності y (x).
2. Основні вимоги:
- тип діаграми і її вид - Точкова (в цьому випадку на графіку будуть відкладатися тільки точки без з'єднувальних ліній);
- назва діаграми - Обробка результатів вимірювань методом найменших квадратів (або назва вашої залежності, наприклад, Вольт-амперна характеристика або Графік залежності швидкості від часу і т.д);
- назва Осі категорій - назва, умовне позначення та одиниці вимірювання величини x, що відкладається по цій осі;
- назва Осі значень - назва, умовне позначення та одиниці вимірювання величини y, відкладається по цій осі;
- розташувати діаграму на окремому аркуші.
3. Додати пряму, побудовану на підставі розрахунків за методом найменших квадратів (так звану лінія тренда).
- викликати контекстне меню по одній з точок графіка і вибрати пункт Додати лінію тренда ...;
- в діалоговому вікні Лінія тренда на вкладці Тип клацнути в полі "Лінійна";



- на вкладці Параметри встановити прапорець опції "показувати рівняння на діаграмі";





- порівняти параметри прямої, рівняння якої виводиться на графіку, з отриманими в результаті обчислень з використанням вбудованої функції.

Лабораторна робота № 5.
Визначення густини тіл

Густиною ρ є величина, що визначається для однорідної речовини (тіла) її масою в одиниці об'єму. Тобто для однорідного тіла знаходимо

$$\rho = \frac{m}{V}, \qquad (1)$$

де m – маса тіла, V – об’єм тіла. Масу тіла в лабораторній роботі визначають як табличне значення.

Для обчислення густини тіла правильної геометричної форми проводимо вимірювання його лінійних розмірів. Далі обчислюємо об'єм за виміряними значеннями лінійних розмірів та відповідною формулою для тіла правильної геометричної форми. Нижче наведено формули об'ємів найпростіших геометричних фігур. Якщо це циліндр, то

$$V = \frac{1}{4}\pi \cdot a^2 \cdot h, \qquad (2)$$

де a – діаметр, h – висота циліндра. Для конуса

$$V = \frac{1}{12}\pi \cdot a^2 \cdot h, \qquad (3)$$

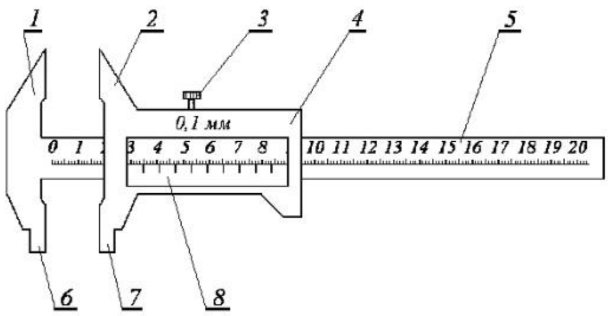
де a – діаметр основи, h – висота, π = 3,14. Для паралелепіпеда

$$V = a \cdot b \cdot c, \qquad (4)$$

де a, b, c три його ребра. Підставити в (1) відповідний об’єм і записати кінцеву робочу формулу $\rho = \frac{m}{V}$.

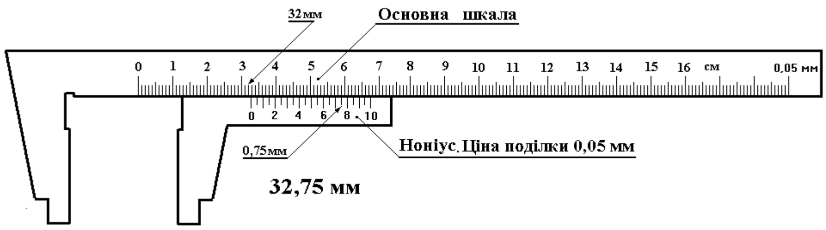
Найпростішим інструментом для вимірювання лінійних розмірів є лінійка. Її найменша поділка дорівнює 1 мм. Точність вимірювання за допомогою лінійки буде дорівнювати половині ціни поділки, тобто 0,5 мм. Для вимірювань із більш високою точністю використовують штангенциркуль та мікрометр. Підвищення точності досягається завдяки використанню допоміжної шкали – ноніуса.

Штангенциркуль зображено на рисунку 1. Він складається з основної металевої лінійки 5 з міліметровими поділками. Па початку її розміщені нижня 6 та верхня 1 губки. Повзунок 4. нижня 7 та верхня 2 губки є одним цілим. Вони можуть переміщуватись уздовж основної лінійки 5 і фіксуватися в потрібному положенні за допомогою гвинта   На нижній частині повзунка 4 нанесені поділки ноніуса 8. Коли губки 6 і 7 стикаються, нуль лінійки і нуль ноніуса повинні збігатися.



1, 2 – верхні губки; 3 – фіксуючий гвинт; 4 – повзунок; 5 – лінійка;
6, 7 – нижні губки; 8 – ноніус.
Рисунок 1 – Штангенциркуль

Другий тип штангенциркуля зображено на рис. 2.



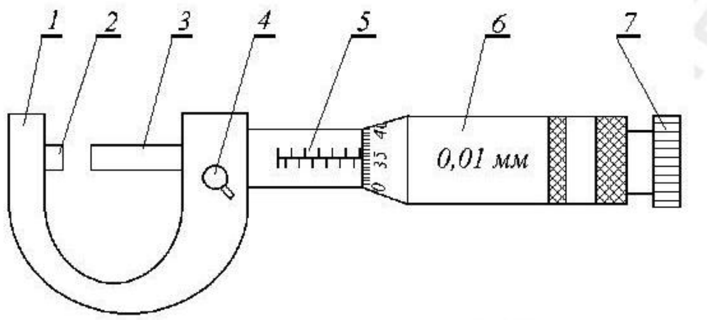
Цілі міліметри відраховуємо по основній шкалі до нульової риски шкали ноніуса. Долі міліметра зчитуємо по шкалі ноніуса по рисці, яка співпадає з будь-якою рискою основної шкали.

Рисунок 2 – Штангенциркуль.

Для того щоб виміряти довжину предмета В, його розміщують між губками 6 і 7 і закріплюють гвинтом Після цього проводять відлік по лінійці і ноніусу й обчислюють довжину предмета L за формулою (9).

Для більш точного вимірювання розмірів предметів застосовуються мікрометричні гвинти з малим і точно витриманим кроком. Такі гвинти використовуються в мікрометрах. Мікрометр використовують для вимірювання зовнішніх розмірів із точністю до 0,01 мм.

Мікрометр (див. рис. 3) складається зі скоби 1, що має па лівому кінці нерухому п'яту 2 (перша вимірювальна поверхня), а з іншого боку – втулку 5, всередині якої встановлено мікрометричний гвинт (шпиндель) 3 з кроком 0,5 мм. Торець цього гвинта 3 і є другою вимірювальною поверхнею. На зовнішній поверхні втулки 5 проведена осьова лінія, уздовж якої нанесені поділки лінійної шкали. Верхні і нижні штрихи лінійної шкали зміщені один відносно одного на півміліметра. Цифри проставлені тільки для поділок нижньої шкали, тобто вона є звичайною міліметровою шкалою. На втулку 5 надіто барабан 6, на скошену кільцеву поверхню якого нанесено шкалу ноніуса із 50 поділками. На голівці мікрометричного гвинта 3 є пристрій 7, що забезпечує сталість тиску на вимірювальний об'єкт. Цей пристрій 7 називається тріскачкою. Для фіксування положення мікрометричного гвинта використовується стопорний гвинт 4.



1 - скоба; 2 - нерухома п'ята; 3 – торець мікрометричного гвинта;
4 - стопорний гвинт; 5 - втулка з міліметровою шкалою;
6 - барабан зі шкалою ноніуса; 7 - тріскачка.

Рисунок 3 – Мікрометр

Для того щоб виміряти довжину предмета, його розміщують між п'ятою 2 і торцем мікрометричного гвинта та мікрометричний гвинт обертають, використовуючи тріскачку 7. При цьому мікрогвинт 3 та барабан 6 обертаються та переміщуються поступально відносно лінійної шкали на втулці 5. Обертання продовжується до зіткнення поверхонь вимірюваної деталі з вимірювальними поверхнями мікрометра 2 та 3, після чого тріскачка починає тріщати, а поступальний рух припиняється. Далі фіксують положення мікрогвинта 3 стопорним гвинтом 4. Зверніть увагу: обертати мікрометричний гвинт потрібно тільки користуючись тріскачкою 7. Інакше мікрометричний гвинт буде зірвано, мікрометр ушкоджено, вимірювання буде неправильним. Числове значення довжини вимірюваної деталі знаходять із формули:

$$L = kb + nh/m, \qquad (5)$$

де к – кількість поділок нижньої і верхньої лінійної шкали втулки, що відкриваються барабаном; b – відстань між сусідніми верхніми та нижніми поділками цієї шкали (0,5 мм); n – номер тієї поділки барабана, що у момент відліку збігається з осьовою лінією втулки; h – крок гвинта (0,5 мм); m – кількість всіх поділок (100) на шкалі ноніуса (барабана). Зверніть увагу: не можна починати вимірювання мікрометром, не перевіривши його початкове показання! Початкове показання мікрометра (тобто без вимірюваного тіла) повинне бути нульовим. Однак трапляються випадки, коли початкове показання мікрометра не дорівнює нулю. В такому разі потрібно визначити поправку до нульового значення (вона може бути як від'ємною, так і додатною величиною) і враховувати її під час вимірювань.

Лінійний ноніус – це невелика лінійка С (рис. 4) із шкалою, m поділок якої дорівнюють m-1 поділкам основної шкали масштабної лінійки А. Звідси випливає, що ціна поділки основної лінійки b та ціна поділки ноніуса a пов'язані між собою співвідношенням

$$am = (m-1)b. \qquad (6)$$

Величину $b - a = b/m$ називають точністю ноніуса, вона дорівнює точності вимірювання.

А - основна шкала; В - тіло, довжина якого вимірюється;
С - шкала лінійного ноніуса.

Рисунок 4 – Схема застосування ноніуса для вимірювання довжини тіла

Процес вимірювання полягає у такому. До нульової поділки шкали основної лінійки прикладають один кінець вимірюваною тіла В, а до іншого кінця тіла В – ноніус С. Тоді, як свідчить рисунок 4 шукана довжина тіла В буде дорівнювати

$$L = kb + \Delta L, \qquad (7)$$

де розмір ΔL визначається з співвідношення (див. рис. 4):

$$\Delta L = nb - na = n(b-a) = nb/m. \qquad (8)$$

Тут к – ціле число поділок масштабної лінійки; n – номер поділки ноніуса C, яка збігається з поділкою основної шкали A, Тоді з формул (7) і (8) отримуємо

$$L = kb + nb/m. \qquad (9)$$

Таким чином, довжина вимірюваного тіла дорівнює сумі двох величин: довжині к поділок основної шкали A, що розміщені зліва від нульової поділки ноніуса, та довжині, що дорівнює добутку точності ноніуса b/m на номер поділки ноніуса n, що збігається с поділкою основної шкали.

2 Вимірювання і визначення похибок

1. Висоту циліндра, конуса, або два ребра паралелепіпеда виміряти один раз.
2. Діаметр основи циліндра (конуса) або третє ребро паралелепіпеда виміряти три рази. Результати занести в таблицю.

Знайти середнє значення, величини діаметра, або ребра, а також відхилення від середнього значення для кожного вимірювання.

4. Розрахувати по одержаній робочій формулі густину даного тіла, підставляючи середні значення виміряних величин, і записати результат в кг/м
5. Визначити похибку прямих вимірювань діаметра або ребра за формулою:

$$\Delta a_{вип} = t\sqrt{\frac{\Sigma\left(\Delta a_i\right)^2}{n(n-1)}}, \qquad (10)$$

де t – коефіцієнт Ст’юдента, n – число вимірювань, Δai – відхилення від середнього значення і - того вимірювання.

Таблиця 1

Циліндр (Конус)	di, мм	Δdi, мм	(Δdi)2, мм2	h, мм
1				
2				
3				
	$\bar{d} =$		$\Sigma\left(\Delta d_i\right)^2 =$	

Таблиця 2

Паралелепіпед	αi, мм	Δ α i, мм	(Δ α d)2, мм2	b, мм	c, мм
1					
2					
3					

	$\bar{a}=$	$\Sigma(\Delta a_i)^2=$		

6. Півширина довірчого інтервалу величини d і α, яка вимірюється декілька разів, визначається виразом:

$$\Delta d = \Delta a = \sqrt{(\Delta a_{вип})^2 + \left(t_\infty \frac{\delta}{3}\right)^2}\ , \qquad (11)$$

де δ = 0,05 мм – границя основної допустимої похибки штангенциркуля.

7. Півширина довірчого інтервалу одноразових вимірювань висоти (циліндра, конуса) або ребер (паралелепіпеда) визначається виразом:

$$\Delta b = \Delta c = \Delta h = \sqrt{\left(t_\infty \frac{\delta}{3}\right)^2 + (\alpha \cdot v)^2}\ , \qquad (12)$$

де α – довірча ймовірність, v – похибка відліку, v = 0,05 мм.

Довірчий інтервал Δm і Δπ необхідно визначити як для довідкових величин. Для цього довірчу ймовірність помножають на п’ять одиниць найменшого відкинутого розряду табличного числа.

8. Відносна похибка для циліндра та конуса розраховується за формулою:

$$E = \frac{\Delta\rho}{\bar{\rho}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{\bar{m}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\pi}{\bar{\pi}}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta d}{\bar{d}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{\bar{h}}\right)^2}, \qquad (13)$$

для паралелепіпеда:

$$E = \frac{\Delta\rho}{\bar{\rho}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{\bar{m}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta a}{\bar{a}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{\bar{b}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta c}{\bar{c}}\right)^2}\ . \qquad (14)$$

9. Визначити півширину довірчого інтервалу

$$\Delta\rho = E \cdot \bar{\rho}\,. \qquad (15)$$

10. Записати кінцевий результат (висновок), застосувавши правила округлення.

11. Порівняти одержаний результат з табличними значеннями густини і визначити з якого матеріалу виготовлено зразок.

Таблиця 3 – Коефіцієнти Ст’юдента

Число вимірювань, n	Довірча ймовірність, α					
	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
3	0,62	0,82	1,06	1,4	1,9	2,5
5	0,57	0,74	0,99	1,2	1,5	2,1
∞	0,52	0,67	0,84	1,0	1,3	1,6

Лабораторна робота № 6.

Моделювання рівномірного руху тіла.

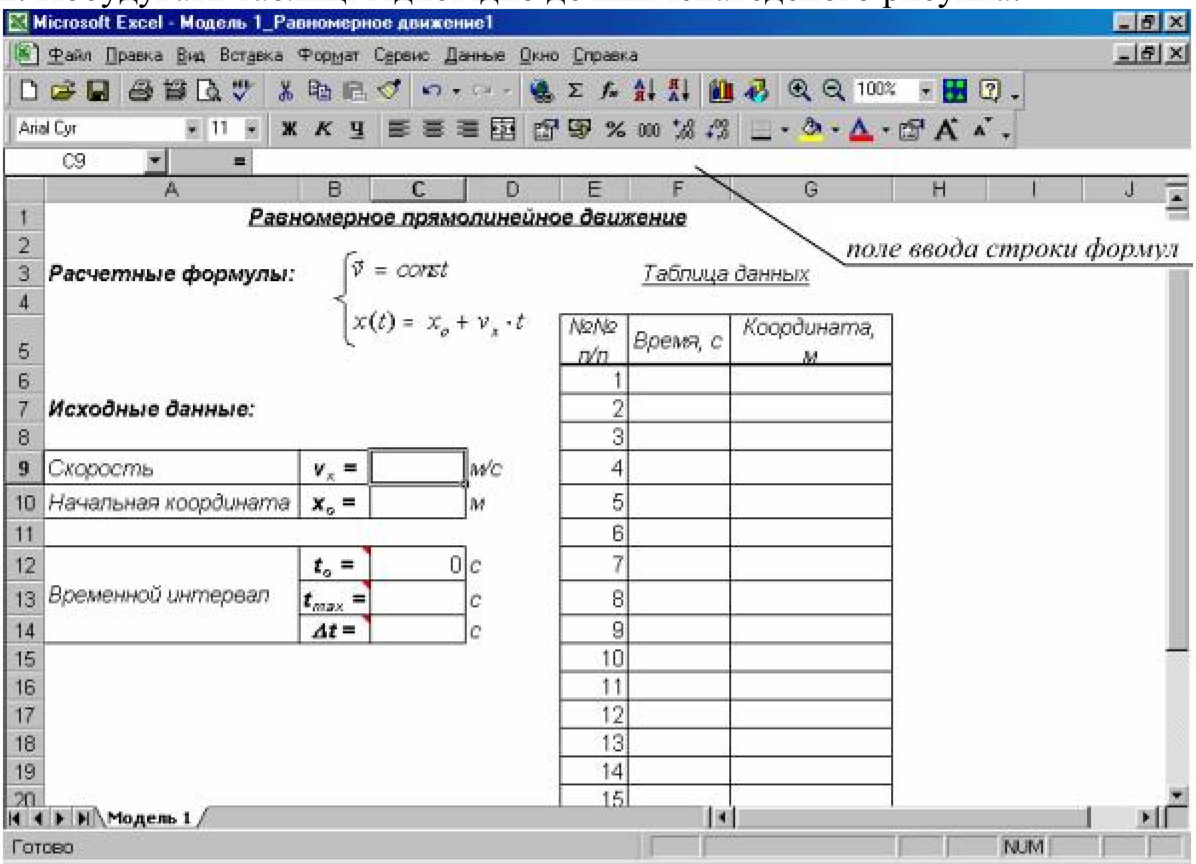
Розглянемо моделювання такого фізичного процесу, як рух тіла з деякою сталою швидкістю v = const. Оскільки жодна з характеристик швидкості (напрямок і величина) не змінюється, рух буде відбуватися вздовж прямої лінії, тобто є прямолінійним, напрямлений вздовж прямої Ox. Кожну секунду координата x тіла буде отримувати один і той же приріст, тому в будь-який момент часу може бути знайдена як x=vxt,

де v - проекція вектора швидкості на вісь Ox. Якщо в початковий момент часу (to = 0) положення тіла не збігалося з початком відліку, то рівняння матиме вигляд: x=x0+vxt. Проекція вектора швидкості - величина скалярна, тобто вона може приймати і негативне, і позитивне значення у залежності від того, який кут утворює вектор швидкості з напрямком осі Ox.

Графічне моделювання процесу рівномірного прямолінійного руху буде полягати в побудові графіка залежності x = f (t) при різних значеннях і напрямках швидкості.

1. Запустити Excel.

2. Побудувати таблиці відповідно до нижченаведеного рисунка:



3. Ввести вихідні дані для даної моделі:

1) початкове положення (координата) тіла,

2) проекція швидкості на обрану вісь,

3) часовий інтервал (задається початковим і кінцевим моментом часу), протягом якого розглядається рух (час протікання процесу).

Змінні величини: час і координата тіла; постійні - проекція швидкості на вісь Ox (це означає, що її числове значення в процесі руху не змінюється). Для побудови графіка x = f (t) необхідно отримати певну кількість точок (t; x). Отже, необхідно

задати крок зміни змінної t - Δt, що розраховується через часовий інтервал і число точок або підінтервалів, на які розбивається весь інтервал: $\Delta t = \frac{t_{max} - t_{min}}{n}$
Якщо в цій формулі n означає кількість підінтервалів, на яку розбивається обраний проміжок часу $t_{min} \div t_{max}$, то таблиця буде містити n +1 точок. Якщо ж n - це кількість точок, то число підінтервалів буде на одиницю менше, а саме n -1.
4. Внести вихідні числові дані у комірки C9, C10 і C13. Початковий момент часу (комірка C12) приймається рівним нулю! Для прикладу вибрати такі значення: Vx =5 м / с, x0 =0 м, tmin =0 с, tmax =10 с.
5. У комірці C14 розрахувати крок зміни часу для 20 підінтервалів.
6. Заповнити таблицю даних.
У комірку F6 внести початковий момент часу з комірки C12 способом копіювання з встановленням зв'язку між цими комірками. Дані, розміщені у стовпці F у нижчих комірках, є моменти часу, що відрізняються один від одного на величину кроку Δt. Тому в клітинку F7 вводиться формула, яка розраховує наступний (після початкового) момент часу = F6 + $ C $ 14, після чого її слід скопіювати в інші комірки колонки таблиці з заголовком "Час, з". У цій формулі необхідно використовувати абсолютне посилання на комірку C14, що містить крок зміни часу, щоб при копіюванні вона не змінювалася. Комірку G6 зв'язати з коміркою C10, що містить початкову координату тіла. У цьому випадку при зміні даних у комірці C10 автоматично зміниться і вміст пов'язаної з нею комірки G6. Скласти і занести в клітинку G7 формулу, що дозволяє розрахувати координату у відповідний їй момент часу. Скопіювати формулу з комірки G7 в діапазон комірок G8:G26.
7. Побудова графіка залежності x (t). Дані для побудови графіка залежності координати рухомого тіла від часу знаходяться в діапазоні комірок F6:G26 створеної таблиці. Значення у стовпці F (діапазон F6:F26) будуть відкладатися по горизонтальній осі (вісь X (категорій)), значення в стовпці G (діапазон G6:G26) - по вертикальній осі (вісь Y (значень)).
7.1. Виділити діапазон даних.
7.2. Вибрати команду Вставка-Діаграма ...
7.3. За допомогою майстра діаграм провести побудова і оформлення графіка. Основні вимоги:
– тип діаграми - Точкова, вид - Точкова діаграма зі значеннями, з'єднаними згладжуючими лініями;
– ім'я ряду даних Залежність x від t (вводиться з клавіатури у відповідне поле);
– назва діаграми і найменування осей координат із зазначенням одиниць виміру величин, що відкладаються по цих осях, задати у вигляді:
"Назва діаграми" - Графік рівномірного руху;
"Ось X (категорій)" - Час t, с;
"Ось Y (значень)" - Координата x, м;
– відключити легенду, тому що в даній задачі використовується тільки один набір (ряд) точок;
– розташувати діаграму на окремому аркуші.
–зберегти дані у файлі.

8. Відформатувати числові дані в таблиці, призначивши діапазону F6:G26 числовий формат з двома десятковими знаками після коми. Простежити, чи впливає крок програми (величина Δt) на вид графіка. Змінюючи початкові дані в комірках C9, C10, C13 і C14, простежити за зміною виду графіка. Поставити від'ємне значення проекції швидкості. Який сенс знака в значенні проекції швидкості? в значенні координати?

Лабораторна робота № 7.
Моделювання рівноприскореного руху тіла.

Розглянемо прямолінійний рівноприскорений рух (a = const). Оскільки рух відбувається вздовж прямої, то для його опису досить однієї координати. Нехай тіло рухається вздовж осі OY. Згідно з визначенням прискорення

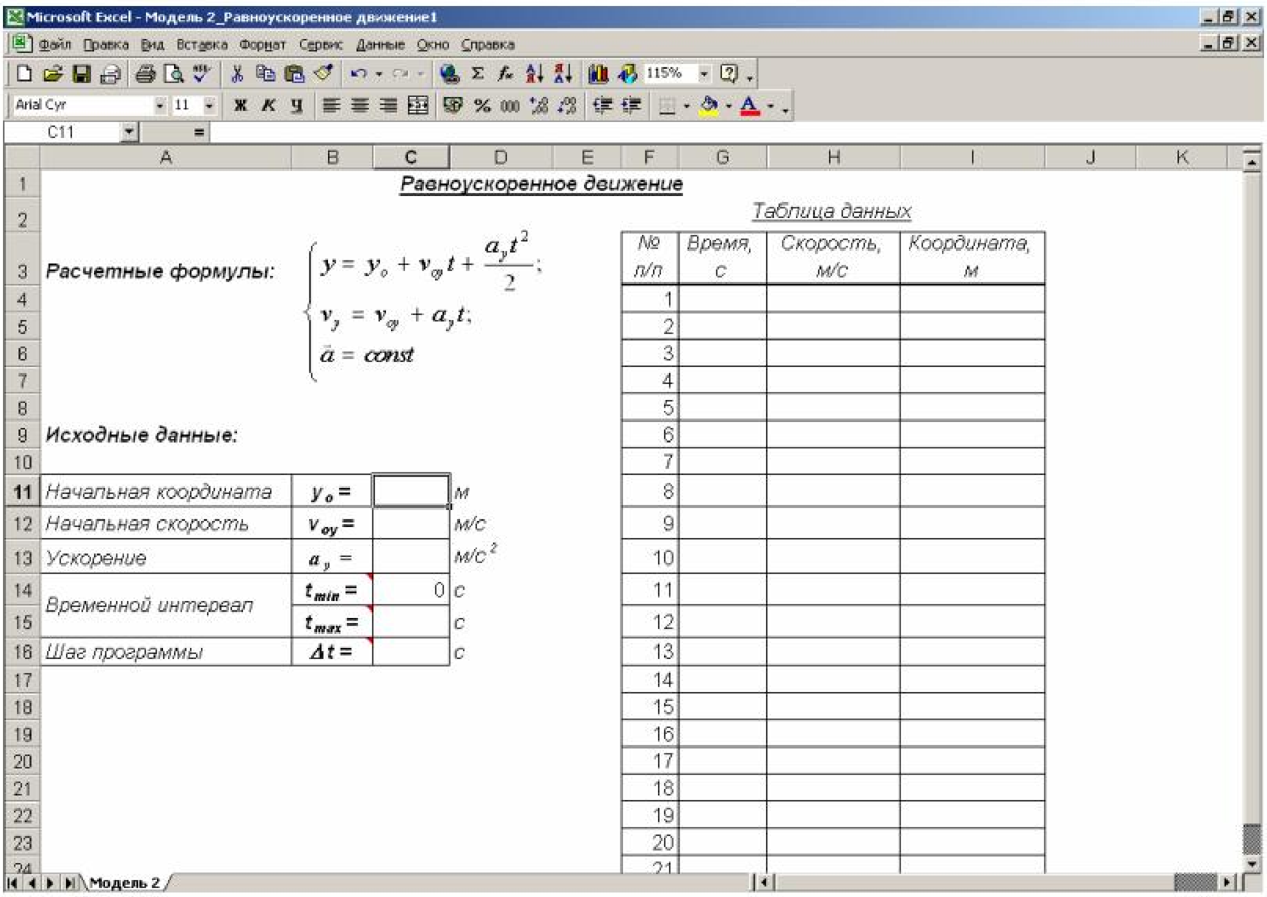
$$\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_o}{t},$$

де в чисельнику стоїть зміна швидкості, а в знаменнику - проміжок часу, за який ця зміна відбулася. Звідси v = vo + a t. Оскільки рух рівноприскорений, то кожну секунду швидкість збільшується на ту ж саму величину. Перепишемо цей вираз в проекції на обраний напрям осі OY: $v_y = v_{oy} + a_y \cdot t$.

Проекції швидкості і прискорення можуть мати значення як більше нуля, так і менше за нуль, що залежить від взаємного напряму векторів v, vo, a і осі OY.
Координата тіла при цьому буде змінюватися за законом:

$$y(t) = y_o + v_{oy} \cdot t + \frac{a_y \cdot t^2}{2}$$

де yo - початкове положення тіла, тобто його координата в момент часу to = 0.
Таким чином, ми розглянули математичну модель рівноприскореного руху, а графічне моделювання буде полягати в побудові графіків залежностей vy = f (t) і y = f (t) при різних значеннях ay, voy.
Завантаження файлу таблиці.
1. Запустити Excel.
2. Побудувати таблиці відповідно до нижченаведеного рисунка:



Аналіз формул показує, що вихідними даними в нашій моделі будуть:
1) координата тіла yo в момент часу, що приймається за нульовий;
2) проекція початкової швидкості на обрану вісь voy;
3) проекція прискорення на обрану вісь ay;
4) часовий інтервал tmin - tmax, протягом якого розглядається рух.
Змінні величини - час, швидкість і координата (вони змінюються в процесі руху); постійні - проекції прискорення і початкової швидкості
3. Заповнити таблицю вихідних даних відповідно до власного вибору.
4. У комірці С16 розрахувати крок Δt для n = 20 підінтервалів, на які розбивається обраний проміжок часу t. Таким чином, таблиця tmin - tmax повинна містити n +1 = 21 точок.
5. Заповнити таблицю "Час-Швидкість -Координата". Стовпець G (колонка Час, с) містить значення моментів часу, в які визначаються швидкість тіла (стовпець H, колонка Швидкість, м/с) і його координата (стовпець I, колонка Координата, м). При цьомукомірки G4 (початковий момент часу), H4 (проекція початкової швидкості) і I4 (координата в початковий момент часу) повинні бути пов'язані з відповідними елементами таблиці вихідних даних (C14, C12 і C11). В комірки G5 - I5 таблиці необхідно занести розрахункові формули і скопіювати їх в ніжній діапазон комірок G6: I24.
Примітка: При формуванні формул не забувайте використовувати абсолютні посилання для постійних величин.
6. Виділити діапазон комірок G4:I24 і задати для нього формат чисел (числовий або експоненціальний).
7. Побудувати графіки залежності швидкості від часу (діапазон даних G4:H24) і координати від часу (діапазон (G4:G24; I4:I24)) на окремих діаграмах, виконуючи вказівки Майстра діаграм.
Основні вимоги:
- тип діаграм Точкова і вид - Точкова діаграма зі значеннями, з'єднаними згладжуючими лініями;
- діаграми повинні мати заголовок (назву графіка) і підписи кожної з осей із зазначенням умовного позначення і одиниць вимірювання величин, що відкладаються по цих осях;
- кожну з діаграм розташувати на окремому аркуші, вказавши для неї відповідне ім'я.
завдання:
1. Перевірити, чи впливає крок зміни часу (тобто кількість тимчасових підінтервалів) на вид графіків.
2. Змінюючи початкові дані в комірках C11, C12, C13 і C15, простежити за зміною виду графіків. Який фізичний зміст негативних значень величин v0y, ay?
3. Порівняти рух тіл з різними прискоренням. Для цього необхідно:
1) скопіювати комірки над діапазоном A13: D13 для введення другого значення прискорення;
2) ввести в комірку C13 ще одне значення прискорення руху тіла, яке відрізняється від наявного, і оформити відповідним чином діапазон комірок B13: D14;
3) додати дві колонки таблиці (стовпчики J і K листа) і провести в них розрахунок швидкості і координати для другого значення прискорення;

4) для кожної з діаграм провести додавання нового ряду даних і задати ім'я кожному з двох рядів даної діаграми. Як ім'я ряду зручно вибрати відповідне йому значення прискорення, ввівши в поле "Ім'я ряду" посилання на діапазон B14: D14 (перший ряд) і B13: D13 (другий ряд даних);

5) вивести легенду;

6) відформатувати дані в таблиці (діапазони H3: H24, I3: I24, J3: J24 і K3: K24), призначивши колір шрифту в цих діапазонах відповідно до кольору графіків.

8. На окремому аркуші розвязати графічно задачу: з пункту А виїхала вантажівка з сталою швидкістю 72 км/год. Одночасно з ним з пункту В, віддаленого від А на відстані 1,5 км, почав рухатися мотоцикліст. Вважаючи рух мотоцикліста рівноприскореним з а =2 м/с2, визначити за допомогою відповідних графіків час, через який мотоцикліст наздожене вантажівку, і шлях, пройдений кожним з них до зустрічі.

Порада: Для більш точного визначення величин за графіком рекомендується включити, крім основних, проміжні лінії сітки.

Лабораторна робота № 8.
Моделювання руху тіла, кинутого під кутом до горизонту.

Розглянемо випадок руху тіла, кинутого під кутом до горизонту, що відбувається тільки під дією сили тяжіння (тертям нехтуємо!). В цьому випадку однієї координати для опису руху недостатньо. Необхідно ввести систему координат xOy, при цьому вісь Ox направляють горизонтально, а вісь Oy - вертикально вгору або вниз. Тепер положення тіла задається двома координатами (x, y), кожна з яких з плином часу буде змінюватися. Закон зміни координат можна встановити з таких міркувань.

Оскільки ми вважаємо, що ніякі сили, крім сили тяжіння на тіло не діють, рух уздовж осі Ox буде рівномірним, і абсциса тіла змінюється за законом x = vxt, де vx = vox = const - проекція швидкості на вісь Ox.

Сила тяжіння, що діє на тіло, надає йому прискорення g, спрямоване так, як і сама сила, вертикально вниз. Тому проекція швидкості на вісь Oy буде змінюватися за законом vy = voy + gyt, де voy, gy - проекція початкової швидкості і прискорення вільного падіння на цю вісь, а ордината тіла з плином часу змінюється як

$$y = y_o + v_{oy}t + \frac{g_y t^2}{2}.$$

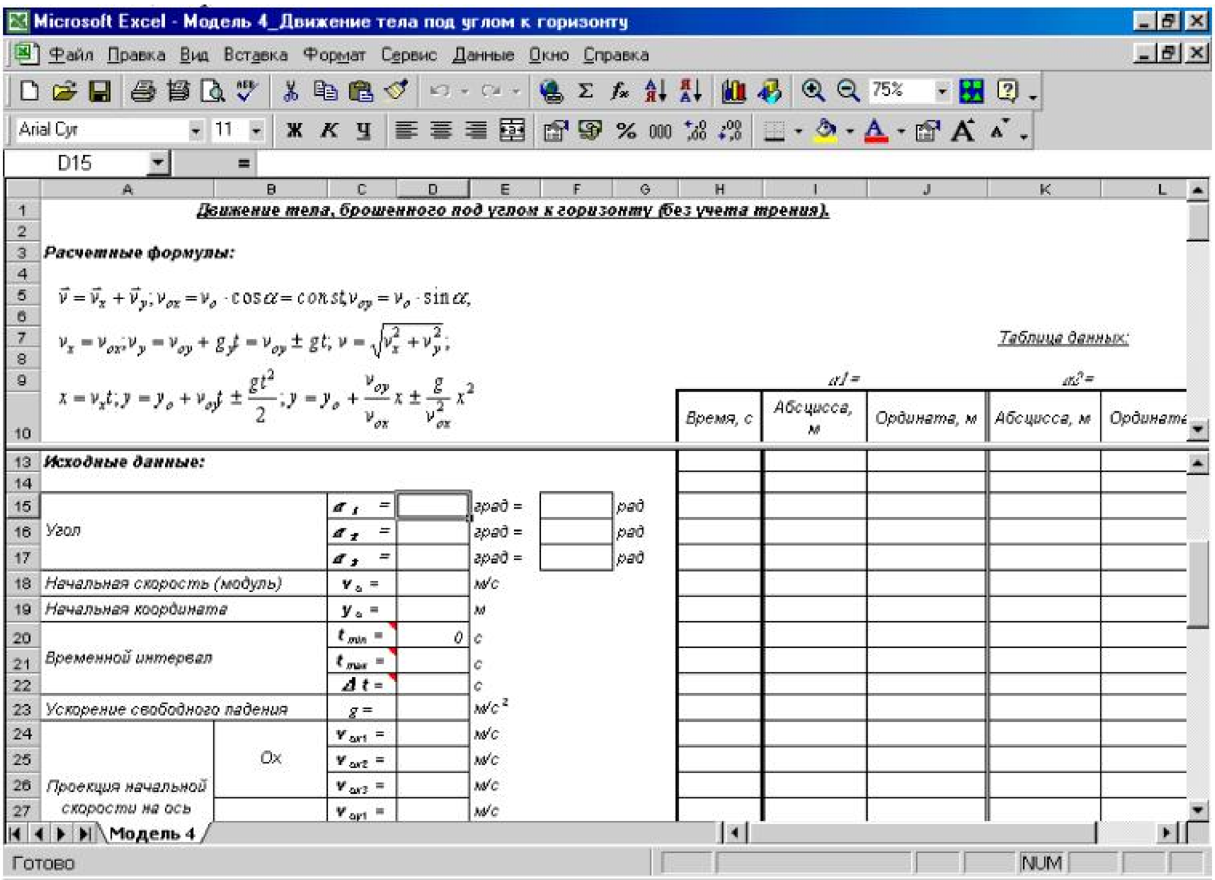
Рівняння траєкторії, тобто залежність y (x), можна знайти, виключивши час з останнього виразу. Виразимо час через абсцису: t = x / vox і підставимо в рівняння ординати:

$$y = y_o + \frac{v_{oy}}{v_{ox}}x + \frac{g_y}{2} \cdot \frac{x^2}{v_{ox}^2},$$

де знаки проекцій vox, voy, gy залежать від напрямку осей координат. У кожній точці траєкторії швидкість тіла спрямована по дотичній до неї і може бути розкладена на дві складові v = v x + v y.

У даній роботі можна простежити за взаємозв'язками наступних величин: x і t, y і t, y і x, а крім того, встановити, як залежить дальність польоту тіла від кута, під яким його кидають, і від величини його початковій швидкості.

1. Запустити Excel.
2. Побудувати наступні таблиці:



2. Проаналізувати всі розглянуті вище формули і виділити результат, змінні і постійні величини.

3. Внести вихідні числові дані на власний розсуд:

1) кути (в градусах) між початковою швидкістю Vo і віссю Ox - в комірках D15, D16, D17. Це дозволить простежити за залежністю траєкторії руху тіла від кута α, під яким проведений кидок. Якщо значення кутів задані в радіанах, вони повинні бути занесені в комірки F15, F16, F17;

2) модуль початкової швидкості - в D18;

3) початкову ординату (висоту, з якої зроблений кидок) - в D19;

4) кінцевий момент часу - в D21;

5) прискорення вільного падіння g (кількість значущих цифр визначається даними завдання, див. Попередню роботу) - в D23;

Початковий момент часу (осередок D20) має дорівнювати нулю!

4. Якщо кути задані в градусах, необхідно виконати перерахунок їх в радіани. Формулу достатньо записати тільки в комірку F15, а потім скопіювати її в комірку F16: F17.

5. В полі D22 розрахувати крок зміни часу Δt для n = 50 підінтервалів, на які розбивається обраний проміжок часу tmin + tmax.

6. Відповідно до розрахункових формула, наведених в робочому аркуші таблиці, визначити проекції початкової швидкості на осі Ox і Oy (комірки D24: D26; D27: D29).

7. Таблиця даних крім колонки Час містить три пари колонок Абсциса- Ордината для трьох заданих значень кута α. Рівняння траєкторії (залежність y (x)) виводиться з системи:

$$\begin{cases} x = v_x \cdot t = v_{ox} \cdot t; \\ y = y_o + v_{oy} \cdot t - \dfrac{g \cdot t^2}{2} \end{cases}$$

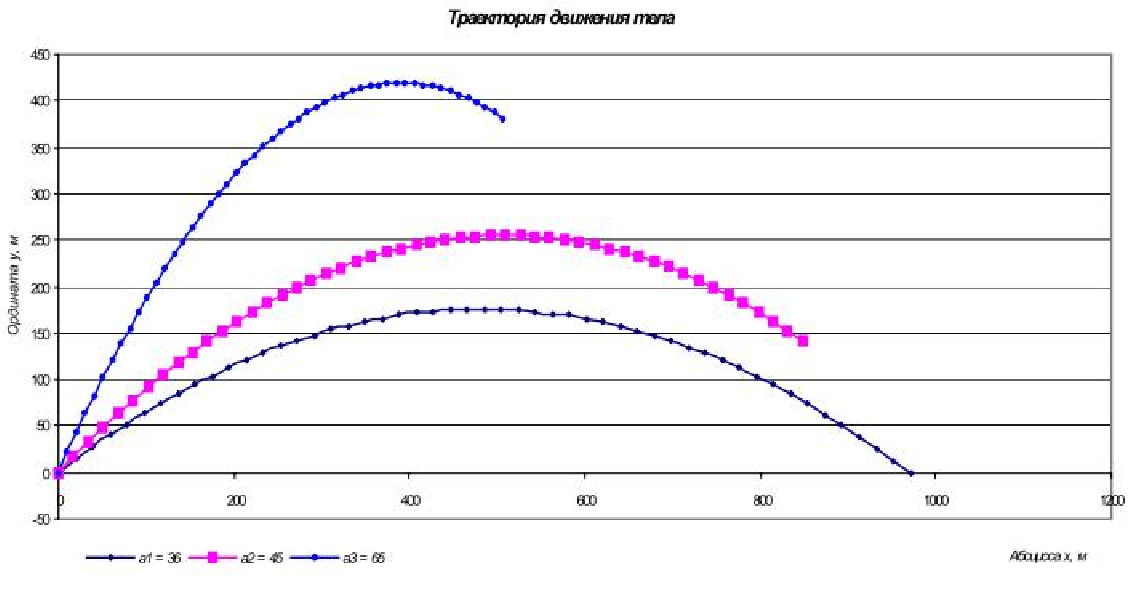
Такий взаємозвязок координат буде часовонезалежним, однак час потрібний для вивчення залежностей виду y (t) і x (t), тобто для визначення абсциси і ординати точки.

Примітка: При складанні формул не забувайте використовувати абсолютні посилання для постійних величин.

8. Таблиця даних містить три ряди (набору) даних (I11: J61; K11: L61; M11: N61) для побудови графіків виду y = f (x) при різних значеннях кута α. Оскільки всі три залежності однотипні (по осях координат відкладаються однакові величини, які мають один і той же порядок), графіки повинні бути представлені в одній системі координат (тобто на одній діаграмі), тому що це дозволить простежити вплив кута на вигляд траєкторії (висоту підняття і дальність польоту). Побудову графіка необхідно починати для одного тільки ряду даних (наприклад, для I11: J61), а потім на відповідному кроці провести додавання інших двох рядів. Кожному ряду необхідно присвоїти ім'я. Оскільки в назві графіка використовується параметр, який можна змінювати (в нашому завданні це кут α), то ім'я бажано пов'язати з коміркою або діапазоном комірок, вміст яких і буде назвою цього набору даних, тобто в поле "Ім'я" треба ввести посилання на відповідний діапазон комірок (C15: D15 - для першого ряду, C16: D16 - для другого і C17: D17 - для третього).

Провести оформлення таким чином, щоб вийшла діаграма, зображена нижче на малюнку.

Діаграму розташовують на окремому аркуші.



9. Додаткове завдання.

1. Змінюючи початкові дані (yo, vo, tmax), простежити за зміною траєкторії. Визначити, при якому значенні кута спостерігається найбільша дальність польоту.

2. Провести побудову графіків залежності y (t) для різних значень кута α на одній діаграмі (всі три залежності мають загальний діапазон даних в стовпці H!). Дані для графіка беруться зі створеної раніше таблиці.
3. Додати новий лист. Створити таблицю для побудови графіка залежності y (x) відповідно до рівняння траєкторії:

$$y = y_o + \frac{v_{oy}}{v_{ox}} \cdot x - \frac{g}{2} \cdot \left(\frac{x}{v_{ox}} \right)^2$$

Відповідно до цього рівняння вихідними даними будуть:
1) початкова ордината (висота) yo;
2) початкова швидкість (модуль) vo;
3) кут α;
4) прискорення вільного падіння g;
Аргументом функції на цей раз є абсциса. Тому необхідно задати діапазон значень координати x (xo (або xmin) - xmax), на якому розглядається рух тіла, і крок зміни Δx для n підінтервалів, число яких вибирається довільно. Таблиця в цьому випадку буде містити N = n + 1 точок.

Лабораторна робота № 9.

Моделювання коливального руху на прикладі математичного маятника.

Якщо тіло здійснює вільні незгасаючі коливання, то його координата з плином часу змінюється за законом косинуса або синуса:

$$x = x_{max} \sin(\omega_o t + \varphi)$$

де xmax - амплітуда, $(\omega_o t + \varphi)$ - фаза коливань, $\boldsymbol{\varphi}$- початкова фаза, ωо - власна циклічна (кругова) частота коливань. Швидкість (перша похідна координати за часом) і прискорення (друга похідна координати за часом) при цьому також будуть змінюватися за гармонійним законом:

$$\mathrm{v}_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x' = x_{\max}\omega_o \cdot \cos(\omega_o t + \varphi) = x_{\max}\omega_o \cdot \sin\left(\omega_o t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$a_x = \frac{\mathrm{dv}_x}{\mathrm{d}t} = x'' = -x_{\max}\omega_o^2 \cdot \sin(\omega_o t + \varphi) = x_{\max}\omega_o^2 \cdot \sin(\omega_o t + \varphi + \pi).$$

Для перетворення виразів ми скористалися формулами приведення. Звідси видно, що швидкість випереджає зміщення по фазі на π/2, а прискорення - на π, тобто знаходиться в протифазі зі зміщенням.

Однією з найпростіших і розповсюджених моделей коливальних систем є математичний маятник: матеріальна точка маси m, підвішена на нерозтяжній нитці довжиною L і здійснює коливання у вертикальній площині. Циклічна частота коливань в цьому випадку рівна

$$\omega_o = \sqrt{g/L}$$

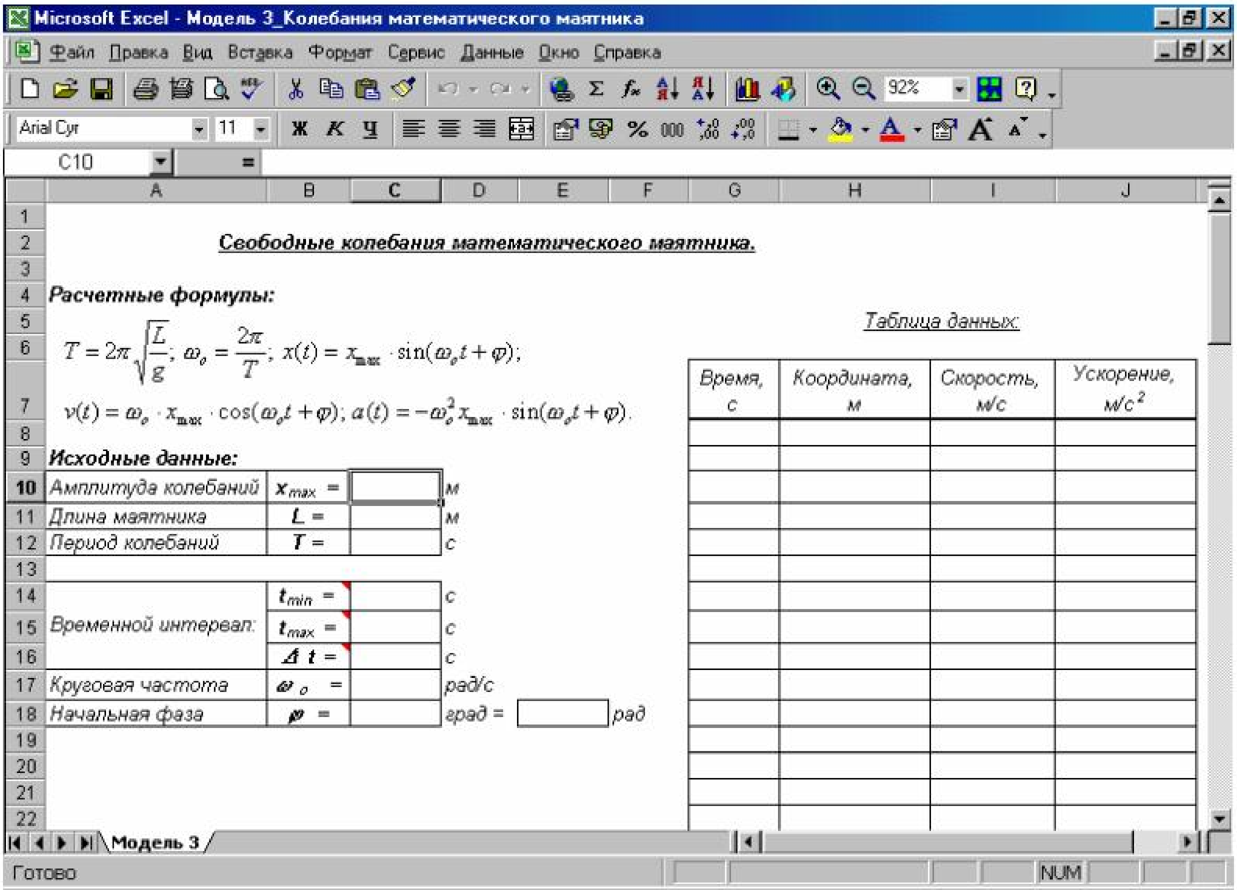
період коливань T

$$T = \frac{2\pi}{\omega_o} = 2\pi\sqrt{L/g}$$

Примітно, що в разі вільних коливань циклічна частота і період коливань визначаються властивостями самої системи і не залежать від початкових умов (початкового зміщення або, що те ж саме, початкової фази).

Мета цієї роботи полягає в тому, щоб побудувати графіки залежності x (t), v (t), a (t) і простежити за їх зміною при зміні параметрів системи.

1. Запустити Excel.
2. Побудувати наступні таблиці:



3. Очевидно, вихідними даними є:
1) амплітуда (максимальне зміщення) xmax;
2) початкова фаза $\boldsymbol{\varphi}$;
3) довжина нитки L;
4) часовий інтервал.

Постійні величини: амплітуда, початкова фаза, довжина нитки, період (частота) коливань. Змінні - зміщення тіла в кожен момент часу (координата x), швидкість і час.

4. Таблицю розраховуйте на 101 точок, тобто число підінтервалів, на які розбивається часовий інтервал, дорівнює 100.
5. Занести вихідні числові дані в комірки C10, C11, C14, C15 і C18 за власним вибором. Початковий момент часу (комірка C14) зручно прийняти рівним нулю.
6. Ввести формули, що дозволяють розрахувати період, частоту коливань, а також інтервал часу Δt в комірки C12, C17 і C16 відповідно. Кількість значущих цифр в прискоренні вільного падіння (g=9,80665 м / с2) і числі π(π=3,14159265358979) вибирається відповідно до даних завдання.
7. Провести перерахунок початкової фази з градусної міри в радіани (тригонометричні функції, які використовуються при розрахунках координати, швидкості і прискорення, обчислюють значення кута, заданого в радіанах) за допомогою вбудованої функції РАДІАНИ ():
1) виділити комірку E18;
2) викликати Мастер функций;

3) в поле "Категорія" вибрати Математичні, в поле "Функція:" - РАДІАНИ. Ця функція перетворює градуси в радіани;
4) в поле "Кут" панелі формул ввести адресу комірки, що містить значення
8. Заповнити таблицю даних (Час-Координата-Швидкість-Прискорення).
1) Стовпець G повинен містити значення часу, що відрізняються на величину Δt, при цьому комірку G8 необхідно пов'язати з C14, щоб відстежувати зміни значення початкового моменту часу. У наступну комірку стовпчика вводиться формула, яка потім копіюється в діапазон G10: G108.
2) В колонках H, I, J обчислюються значення координати, швидкості і прискорення на відповідні моменти часу з стовпчика G.
Примітка: При введенні формул не забувайте використовувати абсолютні посилання для постійних величин.
9. За результатами розрахунків необхідно побудувати три графіки: x (t), v (t) і a (t). Оскільки у всіх випадках по осі Ox відкладається одна і та ж величина (час), всі три залежності можна розмістити в одній системі координат. Такий спосіб побудови застосовується в тих випадках, коли необхідно провести порівняння декількох різних (неоднорідних) величин або досліджувати поведінку деякої величини в залежності від початкових умов або умов проведення експерименту. Однак він має і недоліки: він застосовний тільки тоді, коли порівнювані величини мають один і той же порядок.
Діапазон даних для побудови діаграми - блок комірок G8: J108. Програма Excel автоматично буде розглядати цей діапазон як три ряди даних, а саме: 1-ий ряд - (G8: H108) (залежність координати від часу), 2-ий ряд - (G8: G108; I8: I108) (залежність швидкості від часу) і 3-ий ряд - (G8: G108; J8: J108) (залежність прискорення від часу), причому перша колонка (діапазон G8: G108) буде загальною для всіх інших.
10. Подальша побудова ведеться за стандартним планом. Основні вимоги:
- вид діаграми - Точкова або Точкова діаграма зі значеннями, з'єднаними згладжуючими лініями, або Точкова діаграма зі значеннями, з'єднаними згладжуючими лініями без маркерів;
- ім'я рядів даних: Зміщення, Швидкість і прискорення (вводиться з клавіатури у відповідне поле);
- назва діаграми і найменування осей координат із зазначенням одиниць виміру величин, що відкладаються по цих осях, задати у вигляді:
"Назва діаграми" - Графіки коливального процесу;
"Ось X (категорій)" - Час t, c;
"Ось Y (значень)" - Координата (м); Швидкість (м / с); Прискорення (м / с);
- включити основні лінії сітки по одній або обох осях;
- включити опцію виведення легенди і вказати її розміщення на діаграмі;
- розташувати діаграму на окремому аркуші.
11. Додаткове завдання:
1. Змінюючи початкові дані (початковий зсув і фазу, довжину маятника), простежити за зміною виду графіків.
2. Розібрати питання про співвідношення величин xmax і L.
3. Визначити зсув фаз між коливаннями кожної пари величин. Це зручно виконати для випадку, коли початкова фаза коливань дорівнює нулю.

4. Поставити для діапазону G8: J108 відповідний формат числових даних (числовий або експоненціальний з певною кількістю десяткових знаків після коми).
5. Змінюючи момент часу tmax (і, тим самим, - інтервал Δt), визначити межі застосування даної моделі.
6. Додати в таблицю вихідних даних контрольні точки для заданого моменту часу і вивести їх на всіх графіках.
7. Знайти серед вбудованих функцій MS Excel такі тригонометричні функції, як тангенс, арксинус, арккосинус, арктангенс. Виписати їх синтаксис і призначення. Чому серед перерахованих функцій немає котангенс? Крім підказки, яка виводиться в кожному діалоговому вікні Майстра, можна додатково отримати розгорнуту довідку по кожній із вибраних функцій натисканням функціональної клавіші F1.
8. Крім функції РАДІАНИ (), що дозволяє перетворити величину кута з градусної міри в радіани, існує функція ГРАДУСИ (), що здійснює зворотну операцію. Знайти її в Майстрі функцій і розібрати синтаксис.
9. Провести побудову кожного графіка окремо.
10. Змінити формули, що містять число π: в них замість набору значення числа π необхідно використовувати вбудовану функцію ПІ () (категорія - Математичні, використовується без аргументу) і округлити результат до потрібного числа значущих цифр за допомогою вбудованої ж функції ОКРУГЛ () (див. Майстер функцій, категорія Математичні, Синтаксис функції: ОКРУГЛ (число; кількість цифр). Робота з Майстром функцій проводиться за описаним вище плану. В поле "Число" в цьому випадку вводиться функція ПІ () (можна безпосередньо з клавіатури в російській розкладці або з використанням правил роботи з вкладеними функціями - див. Додаток), а в полі "Кількість цифр" - кількість десяткових розрядів, до якого потрібно округлити число. При цьому:
• якщо кількість цифр більше 0, то число округляється до зазначеної кількості десяткових розрядів праворуч від десяткової коми;
• якщо кількість цифр дорівнює 0, то число округляється до найближчого цілого;
• якщо кількість цифр менше 0, то число округляється коду коми.
12. Розібрати синтаксис всіх функцій округлення чисел: ОКРВВЕРХ; ОКРВНИЗ; ОКРУГЛВВЕРХ; ОКРУГЛВНИЗ; а також ЦІЛЕ і ОТБР.

Лабораторна робота № 10
Пружний і непружний удари куль

Ударом називається зіткнення тіл, при якому за дуже короткий проміжок часу відбувається значна зміна швидкостей тіл.
Під час удару тіла зазнають деформації. Кінетична енергія відносного руху тіл. що співударяються. па короткий час перетворюється в енергію пружної деформації. При ньому має місце перерозподіл енергії між тілами, що співударяються.
Якщо після зіткнення в обох взаємодіючих тілах не залишається ніяких деформацій і уся кінетична енергія, яку вони мали до удару, знову перетворюється в їх кінетичну енергію, то таке зіткнення називається абсолютно пружним ударом.
Якщо в результаті зіткнення двох тіл деформація не зникає й обидва тіла, об'єднуючись, рухаються далі як єдине тіло, то таке зіткнення називається абсолютно непружним ударом.
Пряма, що проходить через точку дотику тіл і нормальна до їхніх поверхонь, називається лінією удару. Якщо лінія удару проходить через центри мас обох тіл, то удар називається центральним.
Удар називається прямим, якщо швидкості взаємодіючих тіл паралельні лінії удару.
Прикладом прямого центрального удару може бути зіткнення двох підвішених па нитках куль у момент проходження ними положення рівноваги.
При абсолютно пружному й абсолютно непружному ударах викопуються закони збереження імпульсу й енергії.
Взагалі законами збереження є фундаментальні закони, згідно з якими за певних умов деякі фізичні величини не змінюються з часом, тобто зберігаються.
Закон збереження і перетворення енергії - загальний закон природи, згідно з яким енергія будь-якої замкнутої системи при всіх процесах, що відбуваються в системі, не змінюється з часом (залишається сталою, зберігається). При цьому енергія може тільки перетворюватися з однієї форми в іншу та перерозподілятися між частинами системи.
Закон збереження імпульсу є закон механіки, згідно з яким сумарний імпульс всіх тіл в будь-якій замкнутій системі при всіх процесах, що відбуваються в системі, не змінюється з часом (залишається сталим, зберігається). Імпульс може перерозподілятися між частинами системи в результаті їхньої взаємодії. Запишемо їх для випадку прямого центрального удару підвішених двох куль.
Закон збереження імпульсу:
а) для абсолютно пружного удару

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2,$$

або в проекції на вісь ОХ, що збігається з лінією удару,

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2, \qquad (1)$$

б) для абсолютно непружного удару

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)u. \qquad (2)$$

Закон збереження енергії:
а) для абсолютно пружного удару

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} \quad , \qquad (3)$$

б) для абсолютно не пружного удару

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2) u^2}{2} + \Delta W \ , \qquad (4)$$

де ΔW величина механічної енергії куль, що перейшла в їхню внутрішню енергію. У випадку, якщо одна із куль (наприклад, із масою m2) перед зіткненням знаходилася в спокої, то вирази (1), (2), (3) і (4) набудуть вигляду:

$$m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \ , \qquad (5)$$

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) u \ , \qquad (6)$$

$$m_1 v_1^2 = m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 \ , \qquad (7)$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2) u^2}{2} + \Delta W \ . \qquad (8)$$

Проте досвід показує, що відносна швидкість тіл після удару не досягає свого колишнього значення. Це пояснюється тим, що немає ідеально пружних тіл і ідеально гладких поверхонь. Крім того, системи реальних тіл не бувають абсолютно замкнутими.

У застосуванні до реальних тіл рівняння (5), (6), (7) і (8) можуть бути записані тільки з відповідними коефіцієнтами пропорційності:

$$m_1 v_1 K_{іпр} = m_1 u_1 + m_2 u_2 \ , \qquad (9)$$

$$m_1 v_1 K_{інепр} = (m_1 + m_2) u \ , \qquad (10)$$

$$m_1 v_1^2 K_{епр} = m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 \ , \qquad (11)$$

$$m_1 v_1^2 K_{енепр} = (m_1 + m_2) u_2^2 \ . \qquad (12)$$

Індекси при коефіцієнтах К означають: іпр - для імпульсу при пружному ударі; інепр - для імпульсу при непружному ударі; епр - для енергії при пружному ударі; енепр - для енергії при непружному ударі.

Оцінимо величину введених коефіцієнтів К для випадку, що реалізується в нашому лабораторному пристрої.

Система застосовуваних куль слабо взаємодіє з навколишніми тілами (через повітря, нитку підвісу і т. п.), тому "втрати" імпульсу й енергії при пружному ударі будуть незначними і коефіцієнти Кіпр, Кінепр, Кепр повинні бути трохи меншими одиниці. При непружному ударі у внутрішню енергію переходить значна частина початкової кінетичної енергії і коефіцієнт Кенепр повинен значно відрізнятися від 1. (Легко показати, що при m1 = m2 ідеальний коефіцієнт Кенепр= 0..5. Для цього потрібно розв'язати спільно рівняння (10) і (12), враховуючи, що Кінепр=1). Довівши експериментально, що Кіпр, Кінепр, Кепр трохи менші за 1, а значення Кенепр значно відрізняється від 1, ми тим самим підтвердимо справедливість рівностей (9), (10), (11) і (12) (у межах похибок виміру), а отже підтвердимо і закони збереження імпульсу й енергії при співударянні реальних тіл.

Зведемо вирази (9), (10), (11) і (12) до вигляду, зручному для обчислення коефіцієнтів К. Розглянемо рис. 1, куля масою m2 знаходиться в стані спокою, а масою m1 - відведена від положення рівноваги на кут α1 (умовимося позначати кути до взаємодії куль через α , а після взаємодії - через β; індекси: 1 для першої кулі, 2 - для другої).

Куля 1 одержить потенціальну енергію

$$E_1 = m_1gh_1 = m_1g(l - l\cos\alpha_1) = m_1gl(1-\cos\alpha_1),$$

яка під час руху кулі перейде в його кінетичну енергію. В момент удару

$$m_1gl(1-\cos\alpha_1) = m_1v_1^2/2,$$

звідки

$$v_1 = \sqrt{2gl(1-\cos\alpha_1)} = 2\sqrt{gl}\sin\frac{\alpha_1}{2}.$$

Якщо кут α1 малий (< 10°), то $\sin\frac{\alpha_1}{2} \approx \frac{\alpha_1}{2}$ (при вимірі кута в радіанах) і тоді $v_1 \approx \alpha_1\sqrt{gl}$. Після удару куля 2 масою m2 одержить швидкість u2 і відхилиться па кут β2. Аналогічно до вищевикладеного можемо одержати $u_2 \approx \beta_2\sqrt{gl}$.

Куля 1 після удару також відхилиться на деякий кут β1. Тоді

$u_1 \approx \beta_1\sqrt{gl}$.

Підставивши значення v1, u1 і и2 в (9), (10). (11) і (12) і розв'язавши рівняння відносно К, одержимо

$$K_{inp} = \frac{\beta_1}{\alpha_1} + \frac{m_2}{m_1}\cdot\frac{\beta_2}{\alpha_1},$$

$$K_{iнenp} = \left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)\cdot\frac{\beta_2}{\alpha_1},$$

$$K_{enp} = \left(\frac{\beta_1}{\alpha_1}\right)^2 + \frac{m_2}{m_1}\cdot\left(\frac{\beta_2}{\alpha_1}\right)^2,$$

$$K_{eнenp} = \left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)\cdot\left(\frac{\beta_2}{\alpha_1}\right)^2.$$

Якщо маси куль узяти приблизно однаковими (m1 ≈ m2), то кут відхилення β1 , кулі масою m1 буде дуже малим і ним можна знехтувати (β1 = 0) Тоді одержимо

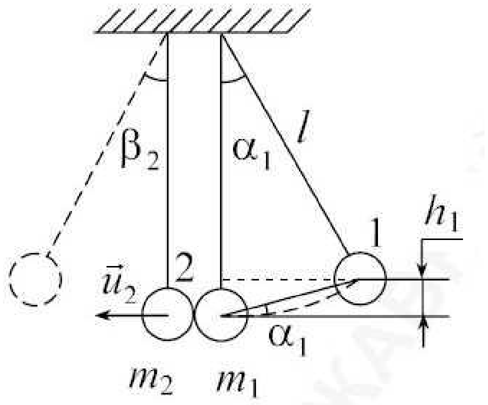
$$K_{inp} = \frac{\beta_2}{\alpha_1}, \qquad (13)$$

$$K_{iнenp} = 2\cdot\frac{\beta_2}{\alpha_1}, \qquad (14)$$

$$K_{enp} = \left(\frac{\beta_2}{\alpha_1}\right)^2, \qquad (15)$$

$$K_{eнenp} = 2\cdot\left(\frac{\beta_2}{\alpha_1}\right)^2. \qquad (16)$$

Обчислення коефіцієнтів К за формулами (13) ÷ (16), зіставлення їх значень із теоретичними для замкнутих систем і одержання певних висновків складає основу даної лабораторної роботи.



1. За допомогою терезів переконайтеся, що маси куль приблизно однакові.
2. Підвісьте на нитках дві кулі для одержання пружного удару. Відрегулюйте їх взаємне положення так, щоб удар був прямим і центральним.
3. Відхиліть праву кулю на кут α1, прикріпивши її до електромагніту. Виміряйте і запишіть величину кута α1 (у градусах) у таблицю з врахуванням похибки на нуль. Здійсніть пружний удар куль, відімкнувши живлення електромагніту. Визначте кут β2 відхилення лівої кулі (з урахуванням похибки на нуль) і запишіть його значення в таблицю 1.
4. Дослід проведіть 5 разів. Результати вимірювань запишіть у таблицю.
5. Поверніть кулі, підвішені на нитках так, щоб одержати непружний удар ("липучками" один до одного). Відхиліть праву кулю на кут α1, прикріпивши її до електромагніту. Занесіть значення кута α1 до таблиці.

Таблиця 1

№	Пружний удар			Непружний удар		
	α1, градус	β2, градус	Δα, Δβ, градус	α1, градус	β2, градус	Δα, Δβ, градус
1						
2						
3						
4						
5						
Середне	Кіпр=			Кінепр=		
	Кепр=			Кенепр=		

7. Здійсніть непружний удар куль. Визначте кут β2 відхилення системи по лівій кулі (з врахуванням похибки па нуль) і запишіть його значення в таблицю.
8. Дослід проведіть п'ять разів, записуючи дані в таблицю.
9. За формулами (13), (14), (15) і (16) обчисліть значення коефіцієнтів К за середніми значеннями кутів α1 і β2.

Оцініть похибки непрямих вимірювань коефіцієнтів К. (Розрахункові формули для цього одержіть відповідним методом для непрямих вимірювань).

10. Проведіть всі обчислення у програмі Exel.

ЛІТЕРАТУРА

1. Методичні вказівки до лабораторних робіт з фізики. Механіка. Молекулярна фізика. Частина 1. Для студентів інженерно-технічних спеціальностей денної форми навчання / Укладачі: Лоскутов С.В., Єршов А.В., Серпецький Б.О., Правда М.І., Манько В.К., Лущін С.П., Курбацький В.П., Работкіна О.В., Денисова О.І. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2009. - 90 с.
2. Методичні вказівки до лабораторних робіт з дисципліни “Метрологія” для студентів спеціальності 6.050801 "Мікроелектроніка і напівпровідникові прилади" денної й заочної форм навчання /Укл.: А.В. Бабіч.- Запоріжжя: ЗНТУ.-2014.- 50 с.
3. Лабораторный практикум по курсу "Моделирование физических процессов": Учебно-методическое пособие для студентов физико-математического факультета. – Коломна: КГПИ, 2002 г. – 88 стр.